УДК 66.083.8-492

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПНЕВМАТИЧЕСКОГО УПЛОТНЕНИЯ ПОРОШКОВ

[1]Оборин А.В., [2]Мурашов А.А.

[1]Ярославский государственный технический университет, Ярославль, e-mail: oborinav@ystu.ru;
[2]Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны, Ярославль, e-mail: alena.severyanka@mail.ru

Рассматривается деаэрация порошков, которая заключается в уменьшении объемной доли воздуха в слое твердых частиц. Из трех известных способов деаэрации: механического, вибрационного и пневматического – последний является наиболее эффективным. Однако его широкое использование сдерживается из-за малой изученности. Предлагается математическая модель пневматической деаэрации порошков, которая включает в себя два этапа. На первом этапе рассматривается просачивание газа (воздуха) в неподвижный слой порошка, внутри которого создан вакуум. За счет перепада давления вне и внутри слоя порошка создается избыточное давление, которое частично релаксируется за счет фильтрации. Математическая модель включает в себя уравнение неразрывности, уравнение фильтрации Дарси и уравнение состояния газа. Система трех уравнений сводится к одному уравнению в частных производных второго порядка, которое решается сеточным методом. На втором этапе математического моделирования рассматривается сжатие скелета твердых частиц за счет сил метафазного взаимодействия. При этом предполагается, что процесс сжатия имеет линейный характер и подчиняется обобщенному закону Гука. Математическая модель сводится к решению уравнения в частных производных первого порядка, которое решается сеточным методом. Исследование модели показывает, что пневматическое уплотнение наиболее эффективно для порошков с малой газопроницаемостью (не более $0{,}8\cdot10^{-11}$ м^2) и малым значением модуля упругости зернистого скелета (соответствует значениям коэффициентов Ламэ: $\lambda < 8$ кПа; $\mu < 10$ кПа).

Ключевые слова: пневматическое уплотнение (деаэрация), тонкодисперсный материал, математическая модель, расчет, газодинамические эффекты

MATHEMATICAL MODEL OF PNEUMATIC SEALING OF POWDERS

[1]Oborin A.V., [2]Murashov A.A.

[1]Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, e-mail: oborinav@ystu.ru;
[2]Yaroslavl Higher Military School of Air Defense, Yaroslavl, e-mail: alena.severyanka@mail.ru

Deaeration of powders is considered, which consists in decreasing the volume fraction of air in the layer of solid particles. Of the three known methods of deaeration: mechanical, vibratory and pneumatic, the latter is the most effective. However, its widespread use is hampered by poor knowledge. A mathematical model of the pneumatic deaeration of powders is proposed, which includes two stages. At the first stage, the leakage of gas (air) into a fixed layer of powder is considered, inside which a vacuum is created. Due to the pressure difference outside and inside the powder layer, an overpressure is created, which is partially relaxed by filtration. The mathematical model includes the continuity equation, the Darcy filtration equation, and the gas equation. The system of three equations reduces to a single partial differential equation of the second order, which is solved by the grid method. At the second stage of mathematical modeling compression of a skeleton of firm particles due to forces of metaphase interaction is considered. It is assumed that the process of compression is linear and obeys the generalized Hooke's law. The mathematical model reduces to solving the first-order partial differential equation, which is solved by the grid method. The study of the model shows that pneumatic compaction is most effective for powders with low gas permeability (not more than $0{,}8\cdot10^{-11}$ m^2) and a low value of the elasticity modulus of the granular skeleton (corresponds to the values of the Lamé coefficients: $\lambda < 8$ kPa, $\mu < 10$ kPa).

Keywords: pneumatic compression (deaeration), fine material, mathematical model, calculation, gas-dynamic effects

В промышленности и сельском хозяйстве широко используются тонкоизмельченные порошкообразные материалы, диаметр частиц которых колеблется в пределах от 0,05 мм до 0,5 мм. Такие сыпучие материалы (например, каолин, технический углерод, белая сажа и др.) имеют малую насыпную плотность и высокую пористость, что приводит к увеличению затрат при их транспортировке, затаривании и хранении. Возникает необходимость принудительного уплотнения (деаэрации) порошков. Успех конструирования оборудования для этих целей и развитие методов расчета уплотнителей зависят от математического моделирования рассматриваемых процессов [1].

В работе [2] предложена классификация и анализ методов осуществления деаэрации тонкодисперсных материалов при упаковке продуктов. При этом показано, что пневматический метод, осуществляемый за счет газодинамических эффектов, является одним из наиболее эффективных методов. Широкое использование данного метода ограничено из-за его малой изученности и недостаточного математического описания [3].

При пневматическом (воздушном) уплотнении (рис. 1) более плотная упаковка твердых частиц происходит за счет сил атмосферного давления. Способ реализуется в емкости с непроницаемым дном при использовании вакуумной установки, создающей в пространстве вокруг порошка пониженное давление. По данным работы [4] пневматическая деаэрация при перепаде давлений порядка 8 кПа дает сокращение объема на 30–40 %.

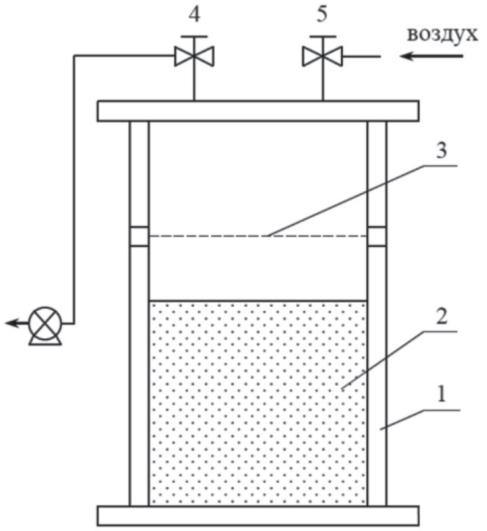

Рис. 1. Принципиальная схема пневматической деаэрации порошков: 1 – сосуд; 2 – порошок; 3 – фильтр; 4 и 5 – клапаны

Принцип действия пневматической деаэрации порошков состоит в следующем. В емкость 1 насыпается заданное количество порошка 2, с высотой слоя H. Через клапан 4 медленно отсасывается воздух, благодаря чему в слое порошка создается пониженное давление с перепадом ΔP. При закрытом клапане 4 через клапан 5 происходит резкая подача атмосферного воздуха. За счет перепада давлений воздуха внутри и вне слоя порошка происходит его уплотнение.

На первом этапе математического моделирования рассмотрим процесс просачивания воздуха в слой порошка. Как и в работе [1], движение газообразной фазы будет описываться следующими уравнениями:

уравнение неразрывности газообразной фазы

$$\frac{\partial \rho_г}{\partial t} + grad\left(\rho_г v_г\right) = 0; \qquad (1)$$

уравнение относительного движения газа в слое твердых частиц или закон Дарси

$$v_г = -\frac{k}{\mu_г} + grad\, P, \qquad (2)$$

где $\mu_г$ – динамическая вязкость газа; k – коэффициент газопроницаемости, который зависит от пористости порошка и определяется выражением

$$k = k_0\left(\frac{\alpha_{10}}{\alpha_1}\right)^n, \qquad (3)$$

где n – некоторая константа; k_0 – коэффициент газопроницаемости газа при начальной пористости α_{10};

уравнение состояния газа, которое для изотермического процесса записано в виде

$$\frac{P_г}{\rho_г} = \text{const}. \qquad (4)$$

Система уравнений (1)–(4) может быть сведена к одному уравнению

$$\frac{\partial P_г}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-\frac{k}{\mu_г}\frac{\partial P_г}{\partial z}\right)\cdot P_г\right] = 0, \qquad (5)$$

для которого начальные и граничные условия формулируются из следующих соображений. Дно емкости является абсолютно непроницаемым для газа, и относительная скорость движения газа равна нулю. В результате имеем

$$z = 0, v_г = -\frac{k}{\mu_г}\frac{\partial P_г}{\partial z} = 0. \qquad (6)$$

В начальный момент времени в слое газа одинаковое пониженное давление. Тогда

$$t = 0,\ P_г = P_a - \Delta P, \qquad (7)$$

где ΔP – перепад давлений в слое порошка и вне его.

На поверхности слоя порошка давление газа равно атмосферному давлению. Математически это условие записывается в виде

$$z = h,\ P_г = P_a. \qquad (8)$$

Для удобства решения сделаем замену переменных

$$\Delta P_г = P_a - P_г. \qquad (9)$$

Тогда уравнение (5) с учетом условия

$$\Delta P_г << P_a \qquad (10)$$

можно привести к виду

$$\frac{\partial\left(\Delta P_г\right)}{\partial t} - \frac{k}{\mu_г}\frac{\partial^2\left(\Delta P_г\right)}{\partial z^2}P_a = \frac{k}{\mu_г}\left[\frac{\partial\left(\Delta P_г\right)}{\partial z}\right]^2. \qquad (11)$$

Начальные и граничные условия для уравнения (11) будут записываться в виде

$$z = 0, \frac{\partial\left(\Delta P_г\right)}{\partial z} = 0; \qquad (12)$$

$$z = h,\ \Delta P_г = 0; \qquad (13)$$

$$t = 0,\ \Delta P_г = \Delta P. \qquad (14)$$

Уравнение (11) с начальными и граничными условиями (12)–(14) решается численно сеточным методом с шагом h_z по переменной z и с шагом h_t по переменной t. Область решения представлена на рис. 2.

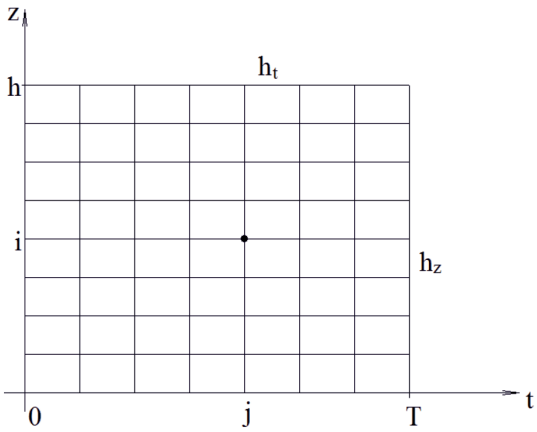

Рис. 2. Область решения задачи

Произвольной точке решения (i, j) соответствуют координаты

$$z_i = h_z \cdot i, i = 0, n; \quad (15)$$

$$t_j = h_t \cdot j, j = 0, m, \quad (16)$$

где параметры n и m определяются выражениями

$$n = \frac{h}{h_z}, m = \frac{T}{h_t}. \quad (17)$$

Значения производных в уравнении (11) заменим приближенными выражениями

$$\frac{\partial(\Delta P_г)}{\partial t} \approx \frac{(\Delta P_г)_{i,j+1} - (\Delta P_г)_{i,j}}{h_t}; \quad (18)$$

$$\frac{\partial(\Delta P_г)}{\partial z} \approx \frac{(\Delta P_г)_{i+1,j} - (\Delta P_г)_{i,j}}{h_z}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2(\Delta P_г)}{\partial z^2} \approx \frac{(\Delta P_г)_{i+1,j} - 2(\Delta P_г)_{i,j} + (\Delta P_г)_{i-1,j}}{h_z^2}. \quad (20)$$

Подставляя выражения (18)–(20) в уравнение (11) и пренебрегая малыми членами, получим

$$(\Delta P_г)_{i,j+1} = (\Delta P_г)_{i,j} + \frac{k}{\mu_г}\frac{h_t}{h_z^2}P_a\left[(\Delta P_г)_{i+1,j} - 2(\Delta P_г)_{i,j} + (\Delta P_г)_{i-1,j}\right]. \quad (21)$$

Исходя из начальных и граничных условий (12)–(14) в дополнение к выражению (21) получим

$$(\Delta P_г)_{0,j} = (\Delta P_г)_{-1,j}; \quad (22)$$

$$(\Delta P_г)_{n,j} = 0; \quad (23)$$

$$(\Delta P_г)_{i,0} = \Delta P. \quad (24)$$

Уравнение (21) с условиями (22)–(24) решалось в среде Microsoft Visual Studio при следующих условиях: $T = 10$ с; $h = 0{,}35$ м; $\Delta P = 8 \cdot 10^3$ Па; $k = 0{,}54 \cdot 10^{-11}$ м^2; $\mu_г = 0{,}182 \times 10^{-4}$ Па·с; $P_a = 10^5$ Па; $h_t = 0{,}025$ с; $h_z = 0{,}025$ м. На рис. 3 приведены графики зависимости значения $\Delta P_г$ от высоты слоя порошка при различных значениях времени, выполненные в среде Microsoft Excel.

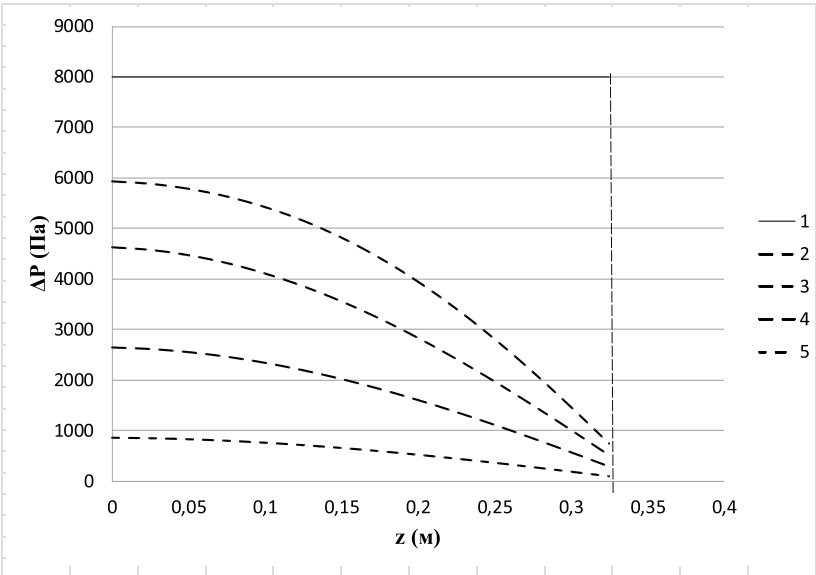

Рис. 3. Зависимость перепада давлений газа от высоты слоя порошка: 1 – t_1 = 0 с; 2 – t_2 = 0,5 с; 3 – t_3 = 1 с; 4 – t_4 = 2 с; 5 – t_5 = 4 с

На втором этапе математического моделирования рассмотрим процесс непосредственно уплотнения порошка за счет перепада давлений в слое газа. При малых изменениях порозности порошка, как было показано в работе [1], твердый скелет испытывает упругие деформации, подчиняющиеся обобщенному закону Гука. Пренебрегая относительным движением слоев порошка, можно сделать предположение о равенстве напряжений, обусловленных упругими свойствами зернистого скелета, и напряжений, обусловленных избыточным давлением газа. Тогда в соответствии с данными работы [1] получим

$$\Delta P_{\text{г}} = A\varepsilon_2^{kk}, \qquad (25)$$

где $A = (\lambda + 2\mu)/3$; ε_2^{kk} – первый инвариант тензора деформаций зернистого скелета, который определяется формулой [1]:

$$\varepsilon_2^{kk} = \frac{\alpha_2 - \alpha_{20}}{\alpha_2}. \qquad (26)$$

В выражениях (25), (26) λ, μ – коэффициенты Ламэ зернистого скелета; α_2 – порозность порошка, связанная с пористостью порошка выражением

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_2. \qquad (27)$$

Согласно (25), (26), (27) после дифференцирования по времени (25) имеем

$$\frac{1}{1-\alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{1}{A}\frac{\partial(\Delta P_{\text{г}})}{\partial t}. \qquad (28)$$

Следует отметить, что в уравнении (28) и пористость порошка α_1 и избыточное давление газа $\Delta P_{\text{г}}$ является функциями координаты z. При этом решение уравнения (21) позволяет рассчитывать величину $\partial(\Delta P_{\text{г}})/\partial t$ для различных значений координат z и t.

Начальное условие для уравнения (28) записывается в виде

$$\alpha_1(z,0) = \alpha_{10}. \qquad (29)$$

Уравнение (28) с начальным условием (29) решается численно сеточным методом, с шагом h_z по переменной z и с шагом h_t по переменной t. Переменные определяются по формулам (15), (16). Область решения соответствует области, представленной на рис. 2. При этом значение производной $\partial(\alpha_1)/\partial t$ в уравнении (28) заменим приближенным выражением

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \approx \frac{(\alpha_1)_{i,j+1} - (\alpha_1)_{i,j}}{h_t}, \qquad (30)$$

а значение производной $\partial(\Delta P_{\text{г}})/\partial t$ заменим приближенным выражением (18).

Подставляя выражения (30), (18) в уравнение (28), получим

$$(\alpha_1)_{i,j+1} = (\alpha_{1\text{г}})_{i,j} + \frac{\left[1-(\alpha_1)_{i,j}\right]}{A}\left[(\Delta P)_{i,j+1} - (\Delta P_{\text{г}})_{i,j}\right]. \qquad (31)$$

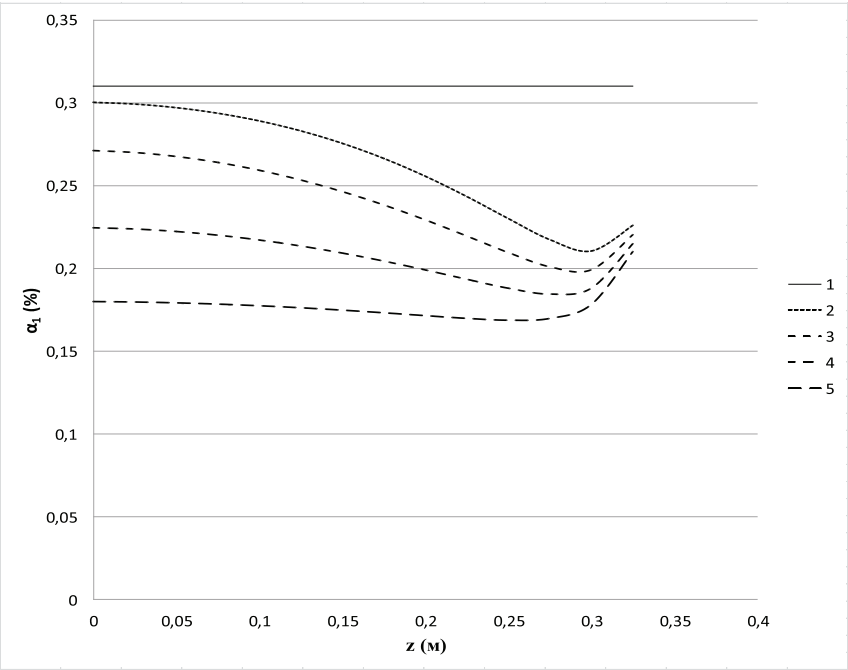

Рис. 4. Зависимость пористости порошка от высоты слоя порошка: 1 – t_1 = 0 с; 2 – t_2 = 0,5 с; 3 – t_3 = 1 с; 4 – t_4 = 2 с; 5 – t_5 = 4 с

В соответствии с начальными и граничными условиями уравнение (31) должно быть дополнено условием

$$(\alpha_1)_{i,0} = \alpha_{10}. \qquad (32)$$

Уравнение (31) с условием (32) решалось в среде Microsoft Visual Studio при следующих условиях: $T = 10$ с; $h = 0{,}35$ м; $\lambda = 38{,}7 \cdot 10^3$ Па; $\mu = 38{,}1 \cdot 10^3$ Па; $h_t = 0{,}025$ с; $h_z = 0{,}025$ м; $\alpha_{10} = 0{,}31$. На рис. 4 приведены графики зависимости значения $\Delta P_г$ от высоты слоя порошка при различных значениях времени, выполненные в среде Microsoft Excel.

Для проверки адекватности теоретических данных были проведены экспериментальные исследования по пневматическому уплотнению каолина (ГОСТ 16680-71) и технического углерода DF-100 (ГОСТ 7885-68), физико-механические свойства которых приведены в таблице. Общая схема экспериментальной установки соответствует схеме, представленной на рис. 1. Параметры порошков определялись по методикам, изложенным в работе [5].

На рис. 5 представлено сопоставление теоретических и экспериментальных данных по уплотнению порошков. Опыты проводились при одном и том же перепаде давлений $\Delta P_г = 8$ кПа. Степень уплотнения η определялась по коэффициентам уплотняемости [5], с учетом этого получим

$$\eta = \left(\frac{\alpha_{10} - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) \cdot 100\%. \qquad (33)$$

Результаты экспериментального определения характеристик порошков

№ опыта	$k \cdot 10^{-11}$ м^2	α_1 %	$\lambda \cdot 10^3$ Па	$\mu \cdot 10^3$ Па	$\rho_н \cdot 10^3$ кг/м^3	$h \cdot 10^{-2}$ м
каолин (ГОСТ 16680-71)						
1	1,02	79	48,0	42,2	0,55	20,1
2	0,83	68	46,2	37,4	0,63	30,5
3	0,76	65	38,7	38,1	0,72	39,7
4	0,78	61	47,1	39,3	0,92	41,5
технический углерод DF-100 (ГОСТ 7885-68)						
1	0,75	79	7,6	9,3	0,37	45,2
2	0,62	76	5,3	7,7	0,41	51,3
3	0,48	65	4,8	6,7	0,44	64,5

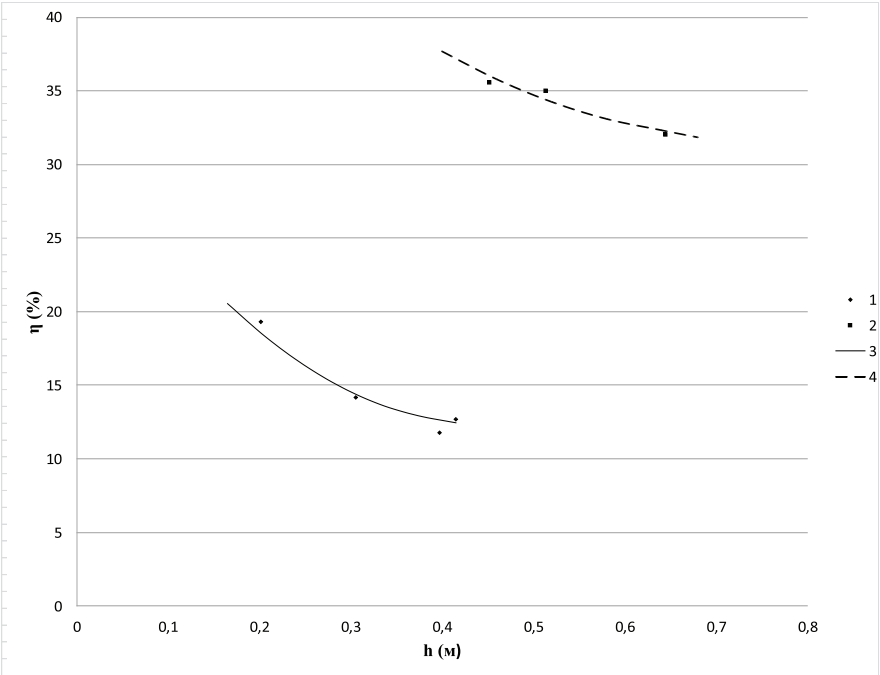

Рис. 5. Зависимость степени уплотнения порошка от высоты слоя порошка: 1, 3 – каолин (ГОСТ 16680-71); 2, 4 – технический углерод DF-100 (ГОСТ 7885-68)

Результаты проведенных экспериментов показывают, что при одном и том же давлении $\Delta P_г = 8$ кПа сокращение объема газа для технического углерода составило 33–39 %, а для каолина 12–21 %. Лучшие результаты уплотнения технического углерода по сравнению с каолином объясняются более низкой газопроницаемостью и сжимаемостью зернистого скелета. При этом экспериментальные данные удовлетворительно согласуются с расчетными данными. Максимальное расхождение не превышает 17 %.

Общий анализ приведенной математической модели пневматического уплотнения порошков показывает, что этот способ наиболее применим для порошков с низкой газопроницаемостью, не превышающей $0{,}8 \cdot 10^{-11}$ м^2, и низкой сопротивляемостью к сжиманию зернистого скелета, которая соответствует значениям коэффициентов Ламэ: $\lambda < 8$ кПа; $\mu < 10$ кПа.

Список литературы

1. Капранова А.Б. Математическое описание процесса механического уплотнения тонкодисперсных материалов: моногр. / А.Б. Капранова, А.А. Мурашов, А.И. Зайцев; Яросл. гос. техн. ун-т. – Ярославль, 2006. – 100 с.

2. Капранова А.Б. Инженерный расчет уплотнителей порошков с сужающимися каналами: моногр. / А.Б. Капранова, А.А. Мурашов, А.И. Зайцев; Яросл. гос. техн. ун-т. – Ярославль, 2008. – 79 с.

3. Генералов М.Б. Механика твердых дисперсных сред в процессах химической технологии: учеб. пособие для студ. вузов / М.Б. Генералов; МГУ инж. экологии. – Калуга: Изд-во Н. Бочкаревой, 2002. – 589 с.

4. Akiyama T. Densification of Powders by Means of Air, Vibratory and Mechanical compactions / T. Akiyama, N. Yamanaka, J.Q. Zhang // Powder Technol. – 1986. – Vol. 46. – P. 173–180.

5. Капранова А.Б. Экспериментальные исследования процесса механического уплотнения тонкодисперсных материалов: моногр. / А.Б. Капранова, А.И. Зайцев, А.В. Оборин; Яросл. гос. техн. ун-т. – Ярославль, 2008. – 104 с.