УДК 534.1

ДИНАМИКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ ВИБРАЦИОННОЙ МАШИНЫ С ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМОЙ

Антипов В.И., Денцов Н.Н., Кошелев А.В.

ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», Нижний Новгород, e-mail: Antipov-15@yandex.ru, dentsovnn90@mail.ru, koshelevav88@mail.ru

Приведены динамическая и математическая модели вибромашины на изотропной упругой подвеске, предназначенные для нахождения стационарных решений на основе метода усреднения. Исследована устойчивость найденных стационарных решений. Показано, что резонансные колебания имеют место, если выполнено пороговое условие, значение которого снижается в два раза по сравнению с однонаправленной упругой системой, что позволяет во столько же раз снизить массу инерционного элемента машины. Построены резонансные кривые и частоты генерации. Рассматривается принцип действия вибрационной машины с изотропной упругой системой. Использование динамических эффектов, заложенных в принцип действия резонансной машины, открывает новые возможности в вибротехнике. Результаты работы могут быть использованы для разработки новых вибрационных машин и технологий. Эти машины могут быть использованы в производстве тонкодисперсных материалов и нанопорошков.

Ключевые слова: динамика, вибрационная машина, осциллятор, параметрический резонанс, изотропная упругая система

DYNAMICS OF THE PARAMETRICALLY EXCITED VIBRATING MACHINE WITH ISOTROPIC ELASTIC SYSTEM

Antipov V.I., Dentsov N.N., Koshelev A.V.

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, e-mail: Antipov-15@yandex.ru, dentsovnn90@mail.ru, koshelevav88@mail.ru

Dynamic and mathematical models of the vibrating machine on the isotropic elastic suspension bracket , intended for a finding of stationary decisions on the basis of an averaging method are resulted. Stability of the found stationary decisions is investigated. It is shown, that resonant fluctuations take place, if the threshold condition which value decreases twice in comparison with unidirectional elastic system that allows to lower weight of an inertial element of the machine in as much time is satisfied. Resonant curves and frequencies of generation are constructed. The principle of action of the vibrating machine with isotropic elastic system is considered. Use of the dynamic effects which have been put in pawn in a principle of action of the resonant machine, opens new possibilities in the vibrating technics. Results of work can be used for working out of new vibrating machines and technologies. These machines can be used in manufacture of fine materials and nanopowders.

Keywords: dynamics, vibrating machine, oscillator, parametrical resonance, isotropic elastic system

Динамика вибромашины с параметрическим возбуждением при прямолинейных колебаниях рабочего органа исследовалась в работах [1, 2, 4, 5, 7]. При этом необходимая форма траектории обеспечивалась однонаправленной упругой системой.

Многие вибрационные технологии для их осуществления требуют возбуждения и поддержания стабильных поступательных круговых колебаний рабочего органа машины. Например, для сверхтонкого измельчения материалов используются шаровые вибрационные мельницы с зарезонансной настройкой, корпус которых совершает поступательные круговые колебания. Эти мельницы характеризуются низкой производительностью и высоким уровнем энергопотребления. Резонансные режимы вибромельниц, являющиеся наиболее эффективными, практически нереализуемы из-за их низкой стабильности при обычном резонансе вынужденных колебаний. Поэтому поиск альтернативных способов возбуждения и стабилизации резонансных машин является весьма актуальным.

Чтобы осуществить поступательные круговые колебания рабочего органа машины, необходимо учесть его перемещение в двух взаимно перпендикулярных направлениях по осям x, y и образовать упругое изотропное поле путем введения упругих элементов с одинаковой жесткостью $c_x = c_y = c$.

Целью данной работы является исследование динамики вибрационной машины с изотропной упругой системой, принцип действия которой основан на самовозбуждении многократного комбинационного параметрического резонанса.

Материалы и методы исследования

Для реализации резонансных колебаний используется параметрический вибровозбудитель. В отличие от инерционного (дебалансного) вибровозбудителя с вращательным движением инерционного элемента (ИЭ), параметрический вибровозбудитель – это резонансный инерционный вибровозбудитель с колебательным движением ИЭ. Основным узлом параметрического вибровозбудителя является роторно-маятниковая система. На рис. 1 приведена динамическая модель вибрационного устройства.

Механизм ИЭ вибровозбудителя выполнен по патенту № 2410167 [11].

Ротор 1 этой системы состоит из набора отдельных одинаковых уравновешенных дисков 2 (рис. 1б). В каждом диске образована пара незамкнутых беговых дорожек 3 кругового профиля, которые расположены симметрично относительно двух взаимно перпендикулярных его диаметров, а их центры смещены от оси вращения ротора в диаметрально противоположных направлениях на одинаковые расстояния $AB = l$. На беговых дорожках размещены одинаковые уравновешенные тела качения (маятники) 4 массой m каждый с возможностью обкатки. Диски соединяются между собой в единую конструкцию так, что беговые дорожки одной пары повернуты вокруг оси ротора на угол $\gamma_0 = \pi/s$ относительно другой, где s – число дисков ($s = 2$).

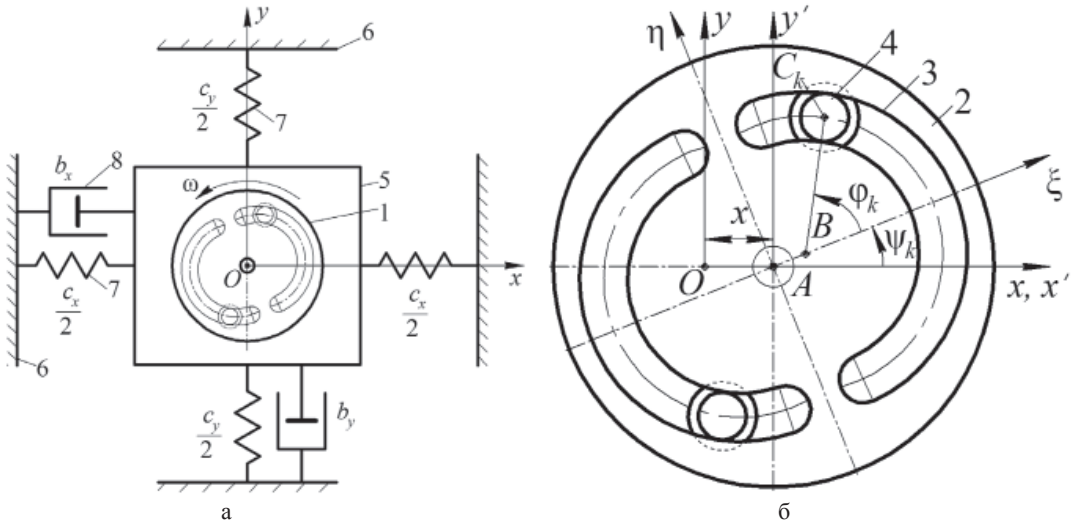


Рис. 1. Динамическая модель вибрационного устройства

Ротор ИЭ содержит $N = 2s$ тел качения (маятников), расположенных попарно в параллельных плоскостях. Ротор ИЭ массой m_0 в собранном виде жестко закрепляется на приводном валу, который посредством подшипников устанавливается на рабочем органе 5 массой M_0. Рабочий орган связан с основанием 6 упругими элементами 7. Демпфер 8 отображает трение от технологической нагрузки.

Система координат $Ax'y'z'$ с началом в центре масс ротора ИЭ движется поступательно относительно неподвижной системы $Oxyz$. При этом плоскость $Ax'y'$ расположена в плоскости вращения ротора. В положении статического равновесия оси этих координатных систем совпадают. Приводной вал получает вращение от электродвигателя, вынесенного из колебательной системы машины. При этом на движение тел качения накладываются нестационарные (реономные) связи за счет равномерного вращения ротора ИЭ с угловой скоростью ω, что предполагает наличие идеального источника энергии. Это предположение на самом деле не столь существенно, поскольку ротор ИЭ с развитым моментом инерции выполняет роль маховика и аккумулятора кинетической энергии. При равномерном вращении ротора ИЭ тела качения образуют в поле центробежных сил инерции подсистему N осцилляторов качения (маятников) с осями обкатки в центрах кривизны беговых дорожек.

Положение беговых дорожек определяется углами $\psi_k = \omega t + 2\pi k / N$, а положение маятников определяется углами φ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. Предполагается, что выполнены условия, при которых осцилляторы качения колеблются без скольжения и отрыва, полученные в работе [9].

Примем параметры x, y, φ_k, где x, y – перемещение рабочего органа, за обобщенные координаты системы.

Характеристики восстанавливающих сил и сил сопротивления задаются в виде:

$$F_x = c_x x + c_{1x} x^3;$$

$$F_y = c_y y + c_{1y} y^3;$$

$$R_x = (b_x + b_{1x} x^2)\dot{x};$$

$$R_y = (b_y + b_{1y} y^2)\dot{y};$$

$$R_{\phi_k} = (\alpha + \alpha_1 \phi_k^2)\dot{\phi}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $c_x = c_y = c$ – суммарная жесткость упругих элементов в направлении осей x, y соответственно; $c_{1x} = c_{1y} = c_1$ – коэффициент нелинейности упругих восстанавливающих сил в соответствующих направлениях; $b_x = b_y = b$, α – коэффициенты линейного демпфирования, $b_{1x} = b_{1y} = b_1$, α_1 – коэффициенты нелинейного демпфирования.

Будем исходить из дифференциальных уравнений движения, полученных в работе [3]. Если ввести безразмерное время $\tau = \lambda_2 t$, безразмерные координаты $\tilde{x} = x / l$, $\tilde{y} = y / l$ и удержать в указанных уравнениях величины до третьего порядка относительно координат и их производных, то математическую модель вибрационной машины с изотропной упругой системой можно записать в следующем виде:

$$\ddot{\phi}_k + \nu^2 \tilde{\omega}^2 \phi_k = \nu^2 \left[\ddot{\tilde{x}} \left(\sin\tilde{\psi}_k + \phi_k \cos\tilde{\psi}_k - \frac{1}{2}\phi_k^2 \sin\tilde{\psi}_k \right) - \ddot{y} \left(\cos\tilde{\psi}_k - \phi_k \sin\tilde{\psi}_k - \frac{1}{2}\phi_k^2 \cos\tilde{\psi}_k \right) \right] +$$

$$+ \beta_1 \nu^2 \tilde{\omega}^2 \phi_k^3 - 2\left(\tilde{n}_0 + \tilde{h}_0 \phi_k^2\right)\dot{\phi}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N \ \ (N = 4);$$

$$\ddot{\tilde{x}}+\tilde{x}=\mu_0\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\ddot{\phi}_k-\tilde{\omega}^2\phi_k\right)\sin\tilde{\psi}_k+2\tilde{\omega}\dot{\phi}_k\cos\tilde{\psi}_k-\frac{1}{2}\tilde{\omega}^2\phi_k^2\cos\tilde{\psi}_k+\phi_k\ddot{\phi}_k\cos\tilde{\psi}_k-\right.\right.$$
$$-2\tilde{\omega}\phi_k\dot{\phi}_k\sin\tilde{\psi}_k+\dot{\phi}_k^2\cos\tilde{\psi}_k-\frac{1}{2}\phi_k^2\ddot{\phi}_k\sin\tilde{\psi}_k+\frac{1}{6}\tilde{\omega}^2\phi_k^3\sin\tilde{\psi}_k-\tilde{\omega}\dot{\phi}_k\phi_k^2\cos\tilde{\psi}_k-$$
$$\left.\left.-\phi_k\dot{\phi}_k^2\sin\tilde{\psi}_k\right]\right\}-\beta_2\tilde{x}^3-2\left(\tilde{n}+\tilde{h}\tilde{x}^2\right)\dot{\tilde{x}};$$
$$\ddot{\tilde{y}}+\tilde{y}=\mu_0\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[\left(-\ddot{\phi}_k+\tilde{\omega}^2\phi_k\right)\cos\tilde{\psi}_k+2\tilde{\omega}\dot{\phi}_k\sin\tilde{\psi}_k-\frac{1}{2}\tilde{\omega}^2\phi_k^2\sin\tilde{\psi}_k+\phi_k\ddot{\phi}_k\sin\tilde{\psi}_k+\right.\right.$$
$$+2\tilde{\omega}\phi_k\dot{\phi}_k\cos\tilde{\psi}_k+\dot{\phi}_k^2\sin\tilde{\psi}_k+\frac{1}{2}\phi_k^2\ddot{\phi}_k\cos\tilde{\psi}_k-\frac{1}{6}\tilde{\omega}^2\phi_k^3\cos\tilde{\psi}_k-\tilde{\omega}\dot{\phi}_k\phi_k^2\sin\tilde{\psi}_k+ \qquad (1)$$
$$\left.\left.+\phi_k\dot{\phi}_k^2\cos\tilde{\psi}_k\right\}\right]-\beta_2\tilde{y}^3-2\left(\tilde{n}+\tilde{h}\tilde{y}^2\right)\dot{\tilde{y}},$$

где $\beta_1 = 1/6$; $\mu_0 = m\rho_c / Ml$; $\tilde{n}_0 = n_0/\lambda_2$; $\tilde{n} = n/\lambda_2$ – безразмерные коэффициенты линейного демпфирования; $\tilde{h}_0 = h_0/\lambda_2$, $\tilde{h} = h/\lambda_2$ – безразмерные коэффициенты нелинейного демпфирования; $\beta_2 = \gamma l^2$ – коэффициент нелинейности упругих восстанавливающих сил; $\tilde{\omega} = \omega/\lambda_2$ – безразмерная частота параметрического возбуждения; $\nu^2 = m\rho_c\, l/J_B$; $\rho_c = BC_k$; $\tilde{\psi}_k = \tilde{\omega}\tau + 2\pi k/N$; $\gamma = c_1/c$. Здесь $M = M_0 + m_0 + Nm$ – общая масса системы; J_B – момент инерции тела качения относительно оси обкатки, $n_0 = \alpha/2J_B$, $n = b/2M$, $h_0 = \alpha_1/(2J_B)$, $h = b_1/(2M)$. Точка обозначает дифференцирование по τ.

Уравнения (1) описывают поведение $N + 2$ равноправных нелинейных осцилляторов и системы связи между ними. Первые N уравнений системы (1) описывают колебания тел качения ИЭ как физических маятников с осями подвеса в центрах кривизны беговых дорожек во вращающейся системе координат $A\xi\eta\zeta$.

Исследуем комбинационный параметрический резонанс, когда колебания в системе (1) возбуждаются на частотах ω_1 и ω_2, связанных с частотой параметрического возбуждения $\tilde{\omega}$ соотношением

$$\tilde{\omega} = \omega_1 + \omega_2, \qquad (2)$$

причем частоты генерации близки к собственным частотам, т.е. $\omega_1 \approx \lambda_1 = \nu\tilde{\omega}$; $\omega_2 \approx \lambda_2 = 1$, и некратны между собой. Параметр ν определяет собственную частоту колебаний осцилляторов во вращающейся системе координат. При вертикальном расположении плоскости вращения ротора ИЭ силы тяжести маятников порождают нестационарное силовое поле. В [8] показано, что при настройке $\nu = 0{,}25$ влиянием сил тяжести маятников можно пренебречь.

Для отыскания решения системы (1) воспользуемся методом усреднения. Сделаем предположение о малости сил трения и нелинейных сил. Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon = \nu^2 N\mu_0/2 << 1$. Этот параметр пропорционален отношению общей массы осцилляторов качения к массе всей системы. Для реальных динамических систем величина ν лежит в пределах: $\nu = 0{,}2$–$0{,}5$. Параметр ν связан с параметром ε соотношением $\nu^2 = 2\varepsilon/N\mu_0 << 1$. В качестве малого параметра можно взять параметр ε. Но при $\varepsilon = 0$ уравнения системы (1) для координат φ_k, $k = 1, 2, ..., N$ превращаются в равенства $\ddot{\phi}_k = 0$. Таким образом утрачивается стандартная (в смысле Н.Н. Боголюбова) форма уравнений системы (1). Поэтому стандартный алгоритм метода усреднения не может быть использован. Введение малого параметра дает возможность выделить группу ведущих членов, определяющих общий характер решения уравнений (1). Благодаря специфике введения малого параметра μ в конечные соотношения метода усреднения входят только исходные параметры системы и необходимость в конкретном определении параметра μ не возникает. Поэтому для привидения системы уравнений (1) к стандартной форме воспользуемся приемом, предложенным в [9] и запишем уравнения (1) в виде

$$\ddot{\phi}_k+\nu^2\tilde{\omega}^2\phi_k=\mu\Phi_1+\mu\beta_1'\nu^2\tilde{\omega}^2\phi_k^3-2\mu\left(\tilde{n}_0'+\tilde{h}_0'\phi_k^2\right)\dot{\phi}_k;$$
$$\ddot{\tilde{x}}+\tilde{x}=\mu\Phi_2-\mu\beta_2'\tilde{x}^3-2\mu\left(\tilde{n}'+\tilde{h}'\tilde{x}^2\right)\dot{\tilde{x}}; \qquad (3)$$
$$\ddot{\tilde{y}}+\tilde{y}=\mu\Phi_3-\mu\beta_2'\tilde{y}^3-2\mu\left(\tilde{n}'+\tilde{h}'\tilde{y}^2\right)\dot{\tilde{y}},$$

где $\mu\beta_1' = \beta_1$; $\mu\tilde{n}_0' = \tilde{n}_0$; $\mu\tilde{h}_0' = \tilde{h}_0$; $\mu\beta_2' = \beta_2$; $\mu\tilde{n}' = \tilde{n}$; $\mu\tilde{h}' = \tilde{h}$. Здесь выражения $\mu\Phi_1$, $\mu\Phi_2$, $\mu\Phi_3$ равны соответственно правым частям уравнений (1), заключенным в квадратные скобки с множителем ν^2 и в фигурные скобки с множителем μ_0.

Принимая во внимание, что стационарные колебания рабочего органа в горизонтальной и вертикальной плоскостях сдвинуты по фазе на четверть периода ($\Delta\theta = -\pi/2$), решение уравнений (1) будем искать в виде

$$\tilde{x} = A\cos(\omega_2\tau+\theta);$$
$$\tilde{y} = A\sin(\omega_2\tau+\theta);$$
$$\phi_k = A_k\cos(\omega_1\tau+\theta_k),\ k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (4)$$

Принимая A, A_k, θ, θ_k за новые медленные переменные и применяя метод усреднения [10], получим для них следующие усредненные уравнения первого приближения:

$$\dot{A}_k=\frac{1}{2}\frac{\nu^2\omega_2^2}{\omega_1}A\left(1-\frac{1}{8}A_k^2\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{N}-\theta_k-\theta\right)-\tilde{n}_0u_0A_k;$$
$$\dot{\theta}_k=-\Delta_{1\beta}^{(k)}+\frac{1}{2}\frac{\nu^2\omega_2^2}{\omega_1}\frac{A}{A_k}\left(1-\frac{3}{8}A_k^2\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{N}-\theta_k-\theta\right);$$
$$\dot{A}=\frac{1}{4}\mu_0\omega_2\sum_{k=1}^{N}A_k\left(1-\frac{1}{8}A_k^2\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{N}-\theta_k-\theta\right)-\tilde{n}uA; \qquad (5)$$
$$\dot{\theta}=-\Delta_{2\beta}+\frac{1}{4}\mu_0\omega_2\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{A}\left(1-\frac{1}{8}A_k^2\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{N}-\theta_k-\theta\right),$$
$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\Delta_{1\beta}^{(k)}=\omega_1-\nu\tilde{\omega}+\frac{3}{8}\beta_1\omega_1A_k^2$; $\Delta_{2\beta}=\omega_2-1-\frac{3}{8}\beta_2\omega_2A^2$; $u_0=1+\frac{1}{4}h_0^*A_0^2$; $u=1+\frac{1}{4}h^*A^2$; $h_0^*=\tilde{h}_0/\tilde{n}_0$; $h^*=\tilde{h}/\tilde{n}$. Величины $\nu\tilde{\omega}-\frac{3}{8}\beta_1\omega_1A_k^2$, $1+\frac{3}{8}\beta_2\omega_2A^2$ можно рассматривать

как парциальные частоты, смещенные за счет нелинейности системы.

Искомый стационарный режим работы вибрационной машины получается как особые точки системы (5). Они будут решениями уравнений (5) при равных нулю правых частях, т.е. $\dot{A}_k = \dot{A} = \dot{\theta}_k = \dot{\theta} = 0$. Это приводит к системе алгебраических нелинейных уравнений относительно амплитуд A, A_k и фаз θ, θ_k. Поскольку осцилляторы качения идентичны, то $A_k = A_0$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Указанные уравнения разрешались при выполнении условий

$$\theta_k = 2\pi k/N,\ k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (6)$$

В результате приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{1}{4}\frac{\nu^2\omega_2^2}{\omega_1}\frac{A}{A_0}\left(1-\frac{1}{8}A_0^2\right)\cos\theta = \frac{\tilde{n}_0 u_0}{2};$$

$$\frac{1}{4}\frac{\nu^2\omega_2^2}{\omega_1}\frac{A}{A_0}\left(1-\frac{3}{8}A_0^2\right)\sin\theta = \frac{-\Delta_{1\beta}}{2};$$

$$\frac{1}{4}\mu_0 N\omega_2\frac{A_0}{A}\left(1-\frac{1}{8}A_0^2\right)\cos\theta = \tilde{n}u;$$

$$\frac{1}{4}\mu_0 N\omega_2\frac{A_0}{A}\left(1-\frac{1}{8}A_0^2\right)\sin\theta = -\Delta_{2\beta}. \qquad (7)$$

Из первого и третьего уравнений (7) найдем отношение амплитуд

$$\frac{A^2}{A_0^2} = \frac{N\mu_0}{\nu^2}\frac{\tilde{n}_0 u_0}{2\tilde{n}u}\frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (8)$$

Из уравнений (7) можно определить $\mathrm{tg}\theta$ и соотношение между расстройками

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{-\Delta_{2\beta}}{\tilde{n}u} = \frac{-\Delta_{1\beta}}{\tilde{n}_0 u_0 u_1}, \qquad (9)$$

где $u_1 = \left(1-\frac{3}{8}A_0^2\right)\Big/\left(1-\frac{1}{8}A_0^2\right)$.

Теперь сложим попарно первое и третье уравнения системы (7), а также второе и четвертое и избавимся от тригонометрических функций. Примем в качестве расстройки величину $\Delta = \tilde{\omega} - (1+\nu\tilde{\omega})$, т.е. расстройку частоты параметрического возбуждения относительно суммы собственных частот и, используя равенство (2), которое теперь принимает вид $\tilde{\omega} = (1+\Delta)/(1-\nu)$, после некоторых преобразований получим уравнение

$$\Delta = \frac{3}{8}\left[\beta_2\left(\frac{1+\Delta}{1-\nu}-\omega_1\right)A^2 - \beta_1\omega_1 A_0^2\right] - \Delta_{2\beta} \pm \left(2\tilde{n}u + \tilde{n}_0 u_0 u_1\right)\sqrt{\frac{\varepsilon\left(\frac{1+\Delta}{1-\nu}-\omega_1\right)^3\left(1-\frac{1}{8}A_0^2\right)^2}{4\tilde{n}_0 n u_0 u\omega_1} - 1}. \qquad (10)$$

Воспользовавшись соотношениями (8), (2), приходим к уравнению:

$$\omega_1 = \left(\frac{\nu(1+\Delta)}{1-\nu} + \frac{\tilde{n}_0 u_0 u_1}{\tilde{n}u}\Delta_{2\beta}\right)\Big/\left(1+\frac{3}{8}\beta_1 A_0^2\right). \qquad (11)$$

Уравнения (10) и (11) позволяют численными методами определить зависимости $A(\Delta)$, $\omega_1(\Delta)$, $\omega_2(\Delta)$. Величины u_0, u содержат A_0^2, A^2, поэтому соотношение (8) приводит к биквадратному уравнению относительно A. Это уравнение имеет решение $A^2 = \frac{2}{h^*}\left(\sqrt{1+\frac{N\mu_0 h^*(1-\nu)\omega_1\tilde{n}_0 u_0 A_0^2}{2\tilde{n}\nu^2\left[1+\Delta-(1-\nu)\omega_1\right]}}-1\right)$. Из уравнения (10) следует условие существования стационарных колебаний, которое с учетом соотношения $\Delta = \tilde{\omega} - (1+\nu\tilde{\omega})$, принимает вид

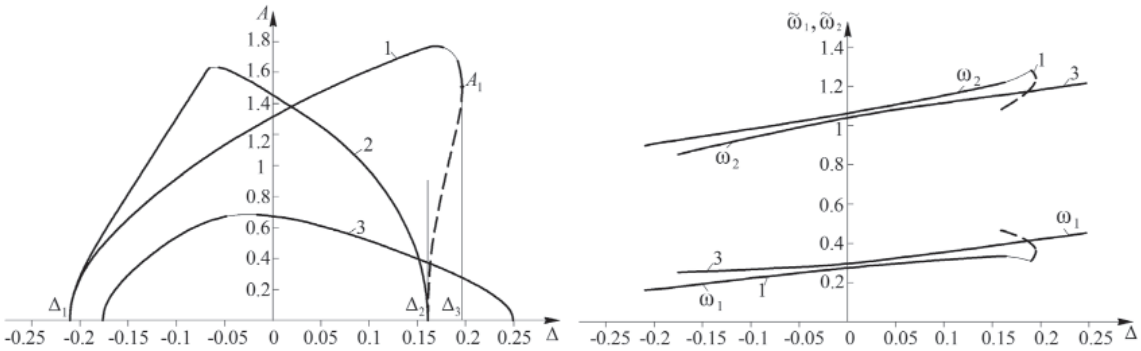
$$\varepsilon\omega_2^3\left(1-\frac{1}{8}A_0^2\right)^2 - 4\tilde{n}_0\tilde{n}u_0 u\omega_1 \geq 0. \qquad (12)$$

Неравенство (12) удовлетворяется тогда, когда при линейном демпфировании выполняется пороговое условие

$$\varepsilon > 4\tilde{n}_0\tilde{n}\nu/(1-\nu) \qquad (13)$$

и когда амплитуды A_0, A не превышают своих максимальных значений. Сравнение условия (13) с аналогичным условием для однонаправленной упругой системы показывает, что для вибромашины с изотропной упругой системой пороговое значение снижается в два раза. Это позволяет в два раза снизить массу инерционного элемента машины.

Результаты численного моделирования уравнений (10) и (11) методом итераций представлены на рис. 2 в виде зависимостей амплитуды A, частот генерации ω_1, ω_2 от расстройки Δ.



а б

Рис. 2. Резонансные кривые и частоты генерации

На рис. 2а кривая 1 соответствует комбинационному резонансу, когда $\varepsilon = 0{,}01$, $\nu = 0{,}25$, $\tilde{n}_0 = \tilde{n} = 0{,}02$, $\tilde{h}_0 = 0{,}06$, $\tilde{h} = 0{,}04$, $\beta_1 = 1/6$, $\beta_2 = 0{,}17$ Резонансная кривая 2 соответствует случаю, когда $\beta_2 = 0$, $\tilde{h}_0 = \tilde{h} = 0{,}04$ при неизменных значениях остальных параметров. Резонансная кривая 3 построена для величин $\tilde{n}_0 = 0{,}02$, $\tilde{n} = 0{,}12$, $\tilde{h}_0 = 0{,}03$, $\tilde{h} = 0{,}06$, $\beta_2 = 0$ и тех же значений других параметров, что и кривая 1. Резонансные кривые $A_0 = A_0(\Delta)$ имеют аналогичный вид, что следует из соотношения (8). В точках резонансных кривых, отмеченных тонкой линией, процесс итераций расходится. Граничные точки $\Delta_1 = -0{,}2083$, $\Delta_2 = 0{,}1594$, являющиеся основанием резонансной кривой 1, определяются из уравнений (10) и (11) при $A = A_0 = 0$. Эти точки не зависят от нелинейностей и совпадают с границами области неустойчивости (резонансной зоны) определяемыми методами линейной теории на основе численной реализации теории Флоке – Ляпунова [3, 5]. На рис. 2, б приведены зависимости ω_1, ω_2 от Δ в полосе параметрической генерации, соответствующие амплитудным кривым 1 и 3.

Для исследования устойчивости особых точек, соответствующих стационарному режиму колебаний, составлялись уравнения в вариациях относительно этих особых точек, которые здесь не приводятся из-за их громоздкости. Система десяти дифференциальных уравнений первого порядка в вариациях преобразуется в эквивалентную систему относительно суммы и разности вариаций амплитуд и фаз осцилляторов ИЭ. Устойчивость преобразованных уравнений определялась с помощью критерия Гурвица.

Результаты исследования и их обсуждение

Анализ устойчивости стационарных решений рассмотрим на примере резонансной кривой 1. Внутри интервала $\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$ тривиальное решение (положения равновесия) неустойчиво, а нетривиальное решение – устойчиво. Стационарные решения в интервале $\Delta_2 < \Delta < \Delta_3$ являются многозначными. Из трех возможных значений амплитуды установившихся колебаний устойчивым колебаниям соответствует тривиальное решение (колебания с нулевой амплитудой) и нетривиальное решение с наибольшей амплитудой, а неустойчивым – с наименьшей амплитудой. Сплошными линиями показаны асимптотически устойчивые решения, а штриховыми – неустойчивые.

Точка $\Delta = \Delta_1$ является точкой бифуркации, при переходе которой положение равновесия теряет устойчивость и возникает неравновесное состояние – периодические колебания. Этот вид потери устойчивости называется мягкой потерей устойчивости, т.к. устанавливающийся колебательный режим при малой закритичности $\varepsilon^* = \Delta - \Delta_1$ (отличие параметра Δ от критического значения Δ_1) мало отличается от равновесия. При переходе ε^* через нуль устойчивый фокус становится неустойчивым и рождается устойчивый предельный цикл малой амплитуды, что соответствует динамической бифуркации Андронова – Хопфа.

Как видно из рис. 2, а обнаруживается эффект расширения резонансной зоны при шестикратном увеличении линейного демпфирования рабочего органа относительно уровня демпфирования осцилляторов ИЭ.

Рассмотрим принцип действия вибрационной машины с изотропной упругой системой. Для этого воспользуемся формулами для определения центра масс маятников по отношению к неподвижной системе координат $Oxyz$. Пусть x_{c_k}, y_{c_k} – координаты центра масс k-го осциллятора качения. Тогда координаты x_c, y_c центра масс системы осцилляторов могут быть вычислены по формулам:

$$x_c = N^{-1}\sum_{k=1}^{N} x_{c_k};$$

$$y_c = N^{-1}\sum_{k=1}^{N} y_{c_k}. \qquad (14)$$

Координаты x_{c_k}, y_{c_k} определяются формулами

$$x_{c_k} = x + l\cos\psi_k + \rho_c\cos(\psi_k + \phi_k);$$

$$y_{c_k} = y + l\sin\psi_k + \rho_c\sin(\psi_k + \phi_k). \qquad (15)$$

Заменяя тригонометрические функции углов φ_k двумя членами разложения их в ряд и выполняя преобразования, описанные в [6], получим следующие формулы для центра масс системы бегунков при $N = 4$:

$$\begin{aligned} x_c &= x - 1/2\rho_c A_0\left(1 - 1/8A_0^2\right)\sin\omega_2 t + 1/12\rho_c A_0^3\sin(\omega_2 + 4\omega_1)t; \\ y_c &= y + 1/2\rho_c A_0\left(1 - 1/8A_0^2\right)\cos\omega_2 t + 1/12\rho_c A_0^3\cos(\omega_2 + 4\omega_1)t. \end{aligned} \qquad (16)$$

Вычислим силу $\overline{R}^{\text{И}}$, действующую на рабочий орган машины от качающихся осцилляторов ИЭ. На основании теоремы о движении центра масс механической системы проекции главного вектора $\overline{R}^{\text{И}}$ на оси координат могут быть определены по формулам $R_x^{\text{И}} = -Nm\ddot{x}_c$, $R_y^{\text{И}} = -Nm\ddot{y}_c$. Если составить дифференциальные уравнения колебаний рабочего органа под действием указанных сил, то увидим, что правые части этих уравнений представляют собой сумму гармонических вынуждающих сил с частотами ω_2 и $\omega_2 + 4\omega_1$. Вторая составляющая вынуждающих сил имеет далеко зарезонансную настройку и ее влиянием можно

пренебречь. Тогда закон движения центра масс системы осцилляторов ИЭ в первом приближении принимает вид

$$x_c = x - 1/2\ \rho_c A_0(1 - 1/8 A_0^2)\ \sin\omega_2 t;$$

$$y_c = y + 1/2\ \rho_c A_0(1 - 1/8\ A_0^2)\cos\omega_2 t\ . \quad (17)$$

Координаты центра масс маятников по отношению к системе координат $Ax'y'z'$ с началом в центре ротора ИЭ выражаются формулами $x_c' = x_c - x,\ y_c' = y_c - y$. В этой системе координат центр масс системы осцилляторов ИЭ описывает окружность в плоскости вращения ротора ИЭ согласно закону:

$$x_c' = -\frac{1}{2}\rho_c A_0\left(1 - \frac{1}{8}A_0^2\right)\sin\omega_2 t;$$

$$y_c' = \frac{1}{2}\rho_c A_0\left(1 - \frac{1}{8}A_0^2\right)\cos\omega_2 t;$$

$$z_c' = 0. \quad (18)$$

Угловая скорость его вращения по этой окружности равна частоте $\omega_2 \approx \lambda_2$ колебаний рабочего органа. Таким образом, автоматически образуется неуравновешенность ИЭ (невидимый дебаланс). Поскольку $\omega_2 \approx \lambda_2$, то неуравновешенная центробежная сила инерции будет возбуждать резонансные колебания рабочего органа. При этом существенна взаимосвязь колебаний: колебания рабочего органа вызывают резонансные колебания осцилляторов качения. Рабочий орган раскачивает и синхронизирует осцилляторы ИЭ на резонансной частоте $\omega_1 = \omega - \omega_2 \approx \lambda_1 = \nu\omega$.

Заключение

Анализ показывает, что с помощью легких маятников ($\varepsilon << 1$) удается раскачать массивный рабочий орган машины, существенно снизить энергопотребление, повысить стабильность резонансного режима колебаний при высокой добротности колебательной системы. При этом реализуется самоуправляемое и самоподдерживаемое собственное движение машины за счет слабых, но «умных» воздействий.

Таким образом, применение параметрических (резонансных) вибровозбудителей обеспечивает высокие количественные и качественные показатели, которыми не обладают машины, построенные на иных принципах.

Список литературы

1. Антипов В.И., Асташев В.К. О принципах создания энергосберегающих вибрационных машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2004. – № 4. – С. 3–8.

2. Антипов В.И., Денцов Н.Н., Кошелев А.В. Энергетические соотношения в вибрационной машине на многократном комбинационном параметрическом резонансе // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. – № 5(1). – С. 188–194.

3. Антипов В.И. Динамика вибрационных машин с параметрическим возбуждением: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Нижний Новгород. Изд. НГТУ, 2001. – 38 с.

4. Антипов В.И. Динамика вибрационных машин с комбинационным параметрическим возбуждением // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – № 2. – С. 13–17.

5. Антипов В.И. Использование комбинационного параметрического резонанса для усовершенствования вибрационных машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1998. – № 4. – С. 16–21.

6. Антипов В.И. О колебаниях вибрационной машины при комбинационном параметрическом резонансе // Известия академии инженерных наук им. А.М. Прохорова. –2006. – Т. 18. – С. 3–10.

7. Антипов В.И., Палашова И.В. Динамика резонансной транспортно-технологической машины // Вестник Нижегородского университета им.Н.И. Лобачевского. – 2010. – № 3(1). – С. 141–147.

8. Антипов В.И., Руин А.А. Динамика резонансной низкочастотной параметрически возбуждаемой вибрационной машины // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. – № 5. – С. 7–13.

9. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971. – 894 с.

10. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. – М., 1980. – 360 с.

11. Патент № 2410167 РФ МКИ В 06 В 1/16. Способ возбуждения резонансных механических колебаний и устройство для его осуществления (варианты). Антипов В.И., Антипова Р.И., Наумов В.И., Палашова И.В. / (РФ) опубл. 27.01.2011, Бюл. № 3.

References

1. Antipov V.I, Astashev V.K. About principles of creation energy of saving up vibrating machines // Problems of mechanical engineering and reliability of machines. 2004. no. 4. pp. 3–8.

2. Antipov V.I, Dentsov N.N., Koshelev A.V. 3ower of a parity in the vibrating machine on a repeated combinational parametrical resonance // the Bulletin of the Nizhniy Novgorod university of N.I. Lobachevsky. 2013. no. 5 (1). pp. 188–194.

3. Antipov V.I. Dynamics of vibrating machines with parametrical excitation // the dissertation Author's abstract on competition of a scientific degree of a Dr.Sci.Tech. Nizhni Novgorod. Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev. 2001. 38 p.

4. Antipov V.I. Dynamic of vibration machines with combinational parametric excitation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2001. no. 2. pp. 13–17.

5. Antipov V.I. Use of a combinational parametrical resonance for improvement of vibrating machines // Problems of mechanical engineering and reliability of machines. 1998. no. 4. pp. 16–21.

6. Antipov V.I. About fluctuations of the vibrating machine at a combinational parametrical resonance // News of academy of engineering sciences of A.M. Prokhorov. 2006. Vol. 18. pp. 3–10.

7. Antipov V.I., Palashova I.V. Dynamics of the resonant transportno-technological machine // the Bulletin of the Nizhniy Novgorod university of N.I. Lobachevsky. 2010. no. 3 (1). pp. 141–147.

8. Antipov V.I, Ruin A.A. Dynamics's Ruins resonant low-frequency parametrical the raised vibrating machine // Problems of mechanical engineering and reliability of machines. 2007. no. 5. pp. 7–13.

9. Blekhman I.I. Synchronization of dynamic systems. M: the Science, 1971. 894 p.

10. Landa P.S. Self-oscillations in systems with final number of degrees of freedom. M., 1980. 360 p.

11. The patent no. 2410167 Russian Federations B 06 B 1/16. A way of excitation of resonant mechanical fluctuations and the device for its realisation (variants). Antipov V.I., Antipova R.I., Naumov V.I., Palashova I.V. / (Russian Federation) 27.01.2011, no. 3.

Рецензенты:

Панов А.Ю., д.т.н., заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород;

Кабалдин Ю.Г., д.т.н., кафедра «Технология и оборудование машиностроения», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород.

Работа поступила в редакцию 02.06.2014.