Идея метода наискорейшего спуска проста [1, 2]: градиент целевой функции $f(X)$ в любой точке есть вектор в направлении наибольшего возрастания значения функции. Следовательно, антиградиент будет направлен в сторону наибольшего убывания функции и является направлением наискорейшего спуска. Антиградиент (и градиент) ортогонален поверхности уровня $f(X)$ в точке X. Если в $X^{k+1} = X^k + l^k \cdot S^k$ ввести направление $\overline{S_k} = -\frac{\nabla f(X^k)}{\left\|\nabla f(X^k)\right\|}$, то это будет направление наискорейшего спуска в точке X^k.

Тогда формула перехода из X^k в X^{k+1}:

$$X^{k+1} = X^k - l^k \frac{\nabla f(X^k)}{\left\|\nabla f(X^k)\right\|} = X^k - m \cdot \nabla f(X^k).$$

Антиградиент дает только направление спуска, но не величину шага. В общем случае один шаг не дает точку минимума, поэтому процедура спуска должна применяться несколько раз. В точке минимума все компоненты градиента равны нулю

Направление поиска, соответствующее наискорейшему спуску, связано с линейной аппроксимацией целевой функции. Методы, использующие вторые производные, возникли из квадратичной аппроксимации целевой функции. При разложении функции в ряд Тейлора отбрасываются члены третьего и более высоких порядков:

$$f(x) \approx f(X^k) + \nabla^T f(X^k)(X - X^k) + \\ + \frac{1}{2}(X - X^k)^T G(X^k)(X - X^k),$$

где $G(X^k)$ - матрица Гессе.

Минимум правой части (если он существует) достигается там же, где и минимум квадратичной формы. Тогда формула для определения направления поиска $\overline{S}$:

$$f(X^k + \overline{S}) = f(X^k) + \nabla^T f(X^k)\overline{S} - \\ - \frac{1}{2}\overline{S}^T G(X^k)\overline{S}.$$

Минимум достигается при $G(X^k)\overline{S} = -\nabla f(X^k), (\overline{S} = -G^{-1}(X^k)\nabla f(X^k))$.

Алгоритм оптимизации, в котором направление поиска определяется из этого соотношения, называется методом Ньютона [1, 4], а направление $\overline{S}$ - ньютоновским направлением.

В задачах поиска минимума произвольной квадратичной функции с положительной матрицей вторых производных метод Ньютона дает решение за одну итерацию независимо от выбора начальной точки.

Идея алгоритма Пауэлла [3] состоит в том, что на каждом этапе поиска определяется минимум квадратичной функции, которой аппроксимируется целевая функция, вдоль каждого из сопряженных ко всем предыдущим. Затем выбирается новая система направлений с использованием результатов поиска и утверждения.

Процедура Пауэлла сходится к точке, в которой градиент равен нулю, если $f(X)$ - строго выпуклая функция. Эта точка является локальным экстремумом. Метод очень чувствителен к способу построения сопряженных направления и поэтому зависит от точности используемого одномерного поиска.

Алгоритм метода сопряженных направлений Пауэлла заключается в следующем.

Шаг 1. Задать начальную точку x^o и систему N линейно независимых направлений s^i; целесообразно принять $s^i = e^i$, $i=1,2,...,N$.

Шаг 2. Минимизировать $f(X)$ при последовательном движении по $N+1$ направлениям; при этом полученная ранее точка минимума берется в качестве исходной, а направление s^N используется как при первом, так и при последнем поиске.

Шаг 3. Определить новое сопряженное направление с помощью обобщенного свойства параллельного подпространства.

Шаг 4. Заменить s^1 на s^2 и так далее. Заменить s^N сопряженным направлением. Перейти к шагу 2.

Для применения метода на практике его необходимо дополнить процедурами проверки сходимости и линейной независимости системы направлений. Если целевая функция квадратична и обладает минимумом, то точка минимума находится в результате реализации N циклов, включающих шаги 2-4. Здесь N - число переменных. Если же функция $f(X)$ не является квадратичной, то требуется более чем N циклов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. http://m-16rulez.narod.ru/Ucheba/MOP/Bo4.doc.
2. Иркитова М.А. Методы безусловной оптимизации, 2001.
3. http://m-16rulez.narod.ru/Ucheba/MOP/Bo3.doc.
4. Горелик В.А. Математическое программирование.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Чипига А.Ф., Колков Д.А.
Северо-Кавказский государственный технический университет, Ставрополь

Основным методом случайного поиска глобального экстремума многомерных функций является мультистарт [1, 2]. При его использовании из множества X случайно или детерминировано выбирается некоторое подмножество из N точек. На каждом i-том подмножестве из случайной начальной точки U_i делается локальный спуск в ближайший минимум U_i^* любым локальным методом поиска. За глобальный минимум U^{**} принимается тот, для которого показатель качества минимален, т.е.:

$$U_N^{**} = \arg\min_{i=1,\dots,N} Q(U_i^*).$$

Очевидно, что при $N \to \infty$ вероятность того, что U_N^{**} является положением глобального минимума, стремится к единице, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} Вер(U_N^{**} = U^{**}) = 1.$$

При конечном N вероятность потери глобального экстремума, т. е. $U_N^{**} \neq U^{**}$, не равна нулю.

Мультистарт - это обобщенный подход: большинство эффективных методов глобальной оптимизации основано на идее метода мультистарта - запуска стандартных локальных алгоритмов из множества точек, равномерно распределенных на множестве *X*. Таким образом, метод мультистарта можно назвать прототипом таких методов.

Адаптивный набросовый алгоритм [3, 4] связан с адаптивным изменением плотности распределения наброса (случайное распределение пробных состояний объекта). Пусть $p(U \mid W, s)$ – плотность распределения, параметры которого определяются вектором *W*, равным математическому ожиданию случайного вектора *U*:

$$W = \int U_p(U \mid W, s)\, dU,$$

и σ – некоторой скалярной мерой рассеяния этого распределения (типа среднеквадратичного отклонения), такой, что при $\sigma = 0$ распределение вырождается в δ-функцию, и имеем $U=W$, а с увеличением σ область наброса расширяется пропорциональна σ по всем направлениям пространства *{U}*. Алгоритм поиска заключается в генерировании последовательности случайных точек *U1,..., UN,...* и выборе точки с наименьшим значением показателя качества:

$$U_N^{**} = \arg\min_{i=1,\dots,N} Q(U_i^*).$$

При этом параметры *W* и σ распределения адаптируются, например, следующим образом:

$$\begin{cases} W_{N-1}\ при\ Q(U_N) \geq Q(U_{N-1}^{**}); \\ U_N\ при\ Q(U_N) < Q(U_{N-1}^{**}), \end{cases}$$

т.е. W_N является лучшей из всех предыдущих точек, и

$$s_N = \begin{cases} g_1 s_{N-1}\ при\ Q(U_N) \geq Q(U_{N-1}^{**}); \\ g_2 s_{N-1}\ при\ Q(U_N) < Q(U_{N-1}^{**}), \end{cases}$$

где параметры g_1 и g_2 могут выбираться исходя из различных соображений.

В случае $g_1 < 1$ и $g_2 > 1$, т. е. при расширении зоны поиска с каждой удачей и сужении – с неудачей, получаем локализирующийся алгоритм, который стремится «стянуть» наброс вокруг лучшей точки. Темп такого стягивания определяет степень глобальности алгоритма. Если стягивание происходит быстро, то, очевидно, будет найден ближайший локальный экстремум; если же медленно, то шансы найти экстремум лучше ближайшего локального повышаются.

В случае $\gamma \approx 1$ вероятность отыскания глобального экстремума, при $N \to \infty$ стремится к единице (при этом еще необходимо, чтобы $p(U \mid W, s) \neq 0$ для любой точки, т. е. чтобы плотность вероятности появления любой допустимой точки не была равна нулю).

Возможен и иной подход к выбору параметров g_1 и g_2. Если логику адаптации как бы «вывернуть наизнанку», т.е. положить $g_1 > 1$, а $g_2 < 1$, то получим несходящуюся процедуру, которая расширяет зону поиска при неулучшении и сужает ее при отыскании лучших точек. Оба подхода обладают своими достоинствами и недостатками. Применение их связанно с конкретными свойствами объекта.

Наиболее простой алгоритм поиска экстремума методом сканирования [5, 6] ("поиск на сетке переменных") заключается в том, что по каждой независимой переменной задаются приращения в соответствующем порядке, обеспечивающем "заполнение" всей исследуемой области равномерной и достаточно густой сеткой. Из значений функции в узлах сетки выбирается оптимальное значение.

Объем вычислений при использовании метода сканирования можно оценить по следующей формуле:

$$S = \frac{111^n}{7D8},$$

где *D* - точность определения экстремума, *n* - количество независимых переменных.

Модификации метода сканирования применяются в основном для сокращения объема вычислений. При сканировании с переменным шагом вначале задается достаточно большой шаг *(DU > e)* и выполняется "грубый" поиск, который локализует область существования глобального экстремума *(P)*. После того, как область определена, производится поиск с меньшим шагом только в пределах найденной области (*s*). Можно организовать ряд таких процедур последовательного уточнения положения оптимума (*s*).

При использовании данного алгоритма объем вычислений существенно сокращается и может быть определен по формуле:

$$S = K^{-rn}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^n + r(2K)^n,$$

где *r* - число этапов уточнения поиска, на котором шаг уменьшался в *K* раз, *n* - число независимых переменных; *D* - точность определения экстремума.

Начальный шаг сетки переменных в данном случае определяется формулой:

$$D_0 = K^r WD.$$

Методы случайного поиска глобальных экстремумов многомерных функций дают высокую вероятность достижения поставленной цели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.

2. Орлянская И.В. Современные подходы к построению методов глобальной оптимизации, МГУ, факультет ВМиК.

3. Растригин Л.А.. Адаптация сложных систем. Рига «Зинатне» 1981.

4. Справочник по теории автоматического управления. 1987 г. «Наука».

5. Сидоров Б.Н., Никулин А.М. Методы безусловной оптимизации функции одной переменной. Москва, 1999 г.

6. http://www.opu.odessa.ua/konsp/MMXTP/RAZDEL5/glava576.htm.

РАЗВИТИЕ МОДЕЛЕЙ НАПАДЕНИЯ СЛУЖБ РАЗВЕДКИ ПО ПЕРЕХВАТУ РЕЧЕВОЙ ИНФОРМАЦИИ

Чипига А.Ф., Мысовская С.Н.
Северо-Кавказский государственный технический университет, Ставрополь

В оценке перспектив развития моделей нападения будем исходить из следующих предпосылок:

1. Идеальная система перехвата речевой/звуковой информации – человеческое ухо (распознавание говорящего, «угадывание» смысла при плохой артикуляции, использование бинаурального слуха для определения направления на объект, пространственная фильтрация помех и т.д.)

2. С развитием средств цифровой обработки сигналов и усовершенствованием аппаратных средств, возможно появление новых способов перехвата речевой/звуковой информации, использующих как новые датчики давления/вибрации, так и новые каналы утечки речевой информации. Оценим диапазон частот и динамический диапазон человеческого уха (рис.1)[1].

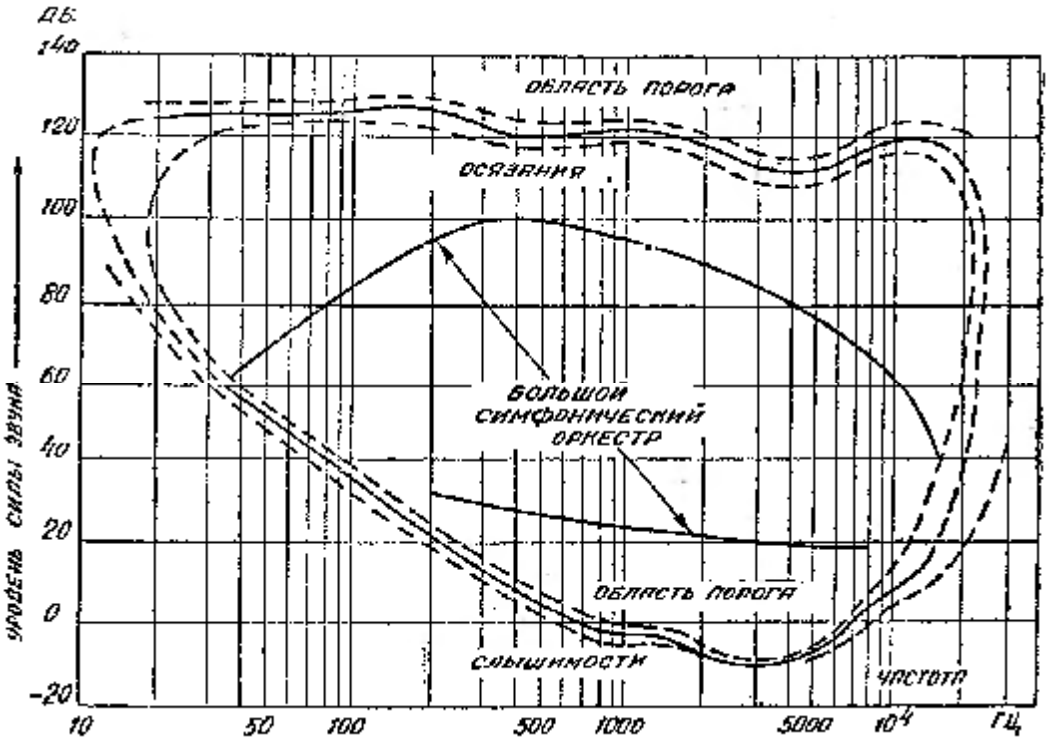

Рисунок 1. Кривые болевых порогов и область слышимости

Экстраполируя вверх, влево и вправо получаем следующий диапазон частот: нижняя граница частот ~ 2 Гц, верхняя ~ 200 кГц. Динамический диапазон слуховой системы человека ~140 дБ (когда слуховые ощущения превращаются в тактильные) над абсолютным порогом чувствительности слуха на частоте 3,5 кГц. Следовательно, для одного канала перехвата частота дискретизации должна быть ≥ 400 кГц (по Котельникову), а число разрядов $N = \frac{(140-1{,}7)\text{дБ}}{6} = 23{,}05 \approx 24$ разряда [2]. Для передачи двух каналов получаем выборки 24 бит с частотой 800 кГц, скорость потока будет ≈ 20 Мбит/с. Такой поток в настоящее время используют в HDTV (TV высокой четкости). Не стоит использовать алгоритмы, осуществляющие сжатие с деградацией сигнала (MP3, WMA, OGG, AC3, и др.)

С другой стороны, человек различает прямо перед собой по звуковому пеленгу до 100 направлений [3]. Основной фактор этого пеленга, скорее всего, бинауральная разность времен регистрации слухового воздействия на рецепторы правого и левого уха. Эта разность есть следствие геометрической разности хода звука к приемникам (ушам). Среднее расстояние между перепонками (по прямой) 17см, следовательно, минимальная разность времен регистрации углового пеленга равна $\frac{0{,}17\text{м}}{100 \cdot 340\text{м/с}} = 5 \cdot 10^{-6}\text{с} = 5\,\text{мкс}$, где 340