УДК 330:519.816

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СИНТЕЗИРОВАНИЯ КРИТЕРИЕМ ВАЛЬДА – СЭВИДЖА И ПРИЛОЖЕНИЕ К ОПТИМАЛЬНОМУ ВЫБОРУ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО СПОСОБА ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ

Лабскер Л.Г.*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва,
e-mail: llabsker@mail.ru*

В игре с природой в качестве принципа оптимальности вводится в рассмотрение синтетический критерий Вальда – Сэвиджа, определяемый линейной сверткой известных пессимистических критериев Вальда относительно выигрышей и Сэвиджа относительно рисков. Критерий Вальда – Сэвиджа дает возможность оценить оптимальность выбираемых стратегий с синтетической (совместной) точки зрения выигрышей и рисков. Определяется новое понятие синтезированной стратегии как стратегии, которая оптимальна по критерию Вальда – Сэвиджа, но не оптимальна ни по критерию Вальда, ни по критерию Сэвиджа. Формулируется проблема синтеза критерием Вальда – Сэвиджа, заключающаяся в нахождении необходимых и достаточных условий, при которых в игре с природой отсутствуют синтезированные стратегии. При выполнении этих условий применение критерия Вальда – Сэвиджа становится бессмысленным, поскольку приводит к оптимальным по критерию Вальда – Сэвиджа несинтезированным стратегиям, которые в то же время оптимальны по критерию Вальда или по критерию Сэвиджа. Предлагается геометрическое решение проблемы синтеза критерием Вальда – Сэвиджа, состоящее в определенном расположении специальных точек, при котором этот критерий не обладает свойством синтеза. Приложение полученных результатов иллюстрируется на анализе задачи экономического содержания, в которой решается вопрос оптимального выбора технологического способа производства продукции с наименьшими затратами.

Ключевые слова: игра с природой, выигрыш-показатель, критерий Вальда – Сэвиджа, проблема синтеза, геометрическое решение, потребность в продукции, производственные затраты, выбор способа производства

GEOMETRIC SOLUTION PROBLEMS OF SYNTHESIS BY WALD – SAVAGE CRITERION AND ANNEX TO THE OPTIMAL CHOICE OF TECHNOLOGICAL METHOD FOR PRODUCING PRODUCTS

Labsker L.G.*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow,
e-mail: llabsker@mail.ru*

In the game with nature, the Wald-Savage synthetic criterion, defined by a linear convolution of Wald's well-known pessimistic criteria regarding winnings and Savage regarding risks, is introduced as an optimality principle. The Wald-Savage criterion makes it possible to evaluate the optimality of the chosen strategies from the synthetic (joint) point of view of gains and risks. A new concept of a synthesized strategy is defined as a strategy that is optimal by the Wald-Savage criterion, but not optimal by either the Wald criterion or the Savage criterion. The problem of synthesizing by the Wald-Savage criterion is formulated, which consists in finding the necessary and sufficient conditions under which there are no synthesized strategies in the game with nature. Under these conditions, the application of the Wald-Savage criterion becomes meaningless, since it leads to unsynthesized strategies that are optimal by the Wald-Savage criterion, which at the same time are optimal by the Wald criterion or Savage criterion. A geometric solution to the synthesis problem by the Wald-Savage criterion is proposed, consisting in a specific arrangement of special points at which this criterion does not have the synthesizing property. The application of the obtained results is illustrated by the analysis of the economic content problem, in which the question of the optimal choice of the technological method of production with the lowest costs is solved.

Keywords: game with nature, winning indicator, Vald – Savage test, synthesis problem, geometric solution, need for products, production costs, choice of production method, lower cost

Принятие решений в экономических задачах зависит от лица, принимающего решение (ЛПР), и от объективной действительности, окружающей решаемую задачу. Математической моделью таких задач во многих случаях служит «Игра с природой», в которой рациональным игроком *A* является ЛПР, а *природой* *P* – объективная действительность. Природа случайным образом принимает одно из своих состояний, не имея в игре никакой цели. ЛПР, прини-

мая решение в условиях неопределенности и будучи рациональным игроком, стремится из возможных стратегий выбрать наиболее эффективную. Для сравнения эффективностей или неэффективностей стратегий ЛПР должен выбрать удовлетворительный принцип оптимальности. Для этой цели существуют различные критерии оптимальности, например выигрыш-критерий Вальда [1; 2, с. 273–308], риск-критерий Сэвиджа [3; 2, с. 308–349] и др.

На наш взгляд, заслуживают внимания также критерии, позволяющие оценивать оптимальность стратегий с синтетической (совместной) точки зрения выигрышей и рисков. Такие критерии назовем *синтетическими*. В данной статье определен синтетический критерий Вальда – Сэвиджа [2, с. 652–655; 4, 5], который с успехом использовался для оптимизации, например, в таких областях, как инвестирование [6, 7], импортные операции [8], кредитование [9] и др. В связи с этим вопрос о существовании стратегий, оптимальных по критерию Вальда – Сэвиджа, является актуальным.

Для формулирования цели исследования дадим описание критерия Вальда – Сэвиджа, для чего предварительно напомним кратко необходимые определения.

Пусть в игре с природой: $S = \{A_1, \dots, A_m\}$, $m \geq 2$ – множество стратегий $A_1, \dots, A_m$ игро-

ка A ; $\Pi_1, \dots, \Pi_n$, $n \geq 2$ – состояния природы Π ; числа a_{ij} , $i \in I \equiv \{1, \dots, m\}$, $j \in J \equiv \{1, \dots, n\}$ – выигрыши игрока A в игровой ситуации (A_i, Π_j) ; A – матрица выигрышей (платежная матрица) (1); $\beta_j = \max\{a_{ij} : i \in I\}$, $j \in J$ – показатель *благоприятности* состояния Π_j ; $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, $i \in I, j \in J$, риск в игровой ситуации (A_i, Π_j) [2, с. 18–25]; R – матрица рисков (1).

Критерий Вальда (W-критерий) [1; 2, с. 273–308] характеризуется следующими компонентами: $W_i = \min\{a_{ij} : j \in J\}$ – W -показатель эффективности стратегии A_i , $i \in I$; $W_S = \max\{W_i : i \in I\}$ – W -цена игры в стратегиях множества S ; стратегия A_i W -оптимальна во множестве S , если $W_i = W_S$; $S^{O(W)}$ – множество W -оптимальных стратегий. W -показатели стратегий и W -цена игры проставлены в дополнительном столбце матрицы A .

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n & W_i \\ \hline A_i & & & & & & \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & W_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & W_m \\ \hline \beta_j & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & W_S \end{array}, R = \begin{array}{c|cccccc} & \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n & Sav_i \\ \hline A_i & & & & & & \\ \hline A_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} & Sav_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} & Sav_m \\ \hline & & & & & Sav_S \end{array} \quad (1)$$

Критерий Сэвиджа (Sav-критерий) [3; 2, с. 308–349] описывается следующими составляющими: $Sav_i = \max\{r_{ij} : j \in J\}$ – Sav -показатель неэффективности стратегии A_i , $i \in I$; $Sav_S = \min\{Sav_i : i \in I\}$ – Sav -цена игры в стратегиях множества S ; стратегия A_i Sav -оптимальна во множестве S , если $Sav_i = Sav_S$; $S^{O(Sav)}$ – множество Sav -оптимальных стратегий. Sav -показатели стратегий и Sav -цена игры проставлены в дополнительном столбце матрицы рисков R .

В определении критерия Вальда – Сэвиджа важную роль играет *выигрыш-показатель* $\alpha \in [0, 1]$. Он выражает степень предпочтения, отдаваемого игроком A выигрышам. Выбор $\alpha \in [0, 1]$ игроком A является субъективным и связан с психологическими особенностями игрока A , определяющими его отношение к выигрышам и рискам. Величина $(1 - \alpha) \in [0, 1]$ является *риск-показателем*.

Критерий Вальда – Сэвиджа ((W-Sav)(α)-критерий) [2, с. 654] определяется следующим образом: $(W-Sav)_i(\alpha) = \alpha W_i - (1 - \alpha) Sav_i$ – $(W-Sav)(\alpha)$ -показатель эффективности стратегии A_i , $i \in I$;

$(W-Sav)_S(\alpha) = \max\{(W-Sav)_i : i \in I\}$ – $(W-Sav)(\alpha)$ -цена игры в стратегиях множества S ; стратегия A_i $(W-Sav)(\alpha)$ -оптимальна, если $(W-Sav)_i(\alpha) = (W-Sav)_S(\alpha)$; $S^{O[(W-Sav)(\alpha)]}$ – множество $(W-Sav)(\alpha)$ -оптимальных стратегий. Очевидно, что $(W-Sav)(0) = (-Sav)$ -критерий, а $(W-Sav)(1) = W$ -критерий.

Стратегию A_i назовем *синтезированной* критерием Вальда – Сэвиджа с выигрыш-показателем $\alpha \in (0, 1)$ (короче – $(W-Sav)(\alpha)$ -синтезированной), если она оптимальна по критерию Вальда – Сэвиджа с выигрыш-показателем α и неоптимальна ни по критерию Вальда, ни по критерию Сэвиджа.

Множество $(W-Sav)(\alpha)$ -синтезированных стратегий обозначим через $S^{S[(W-Sav)(\alpha)]}$.

Если ни при каком выигрыш-показателе $\alpha \in [0, 1]$ не существует синтезированной стратегии, то будем говорить, что *критерий Вальда – Сэвиджа не обладает свойством синтеза*.

Очевидно, что при выигрыш-показателях $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, $(W-Sav)(\alpha)$ -критерий свойством синтеза не обладает.

По определению $(W-Sav)(\alpha)$ -критерия мы можем заключить, что он предназначен для синтеза крайне высоких пред-

почтений, отдаваемых игроком A выигрышам ($\alpha = 1$, W -критерий) и рискам ($\alpha = 0$, Sav -критерий).

Применяя $(W-Sav)(\alpha)$ -критерий при определённом выигрыш-показателе $\alpha \in (0,1)$, игрок A надеется в качестве оптимальной получить синтезированную стратегию, а не стратегию, оптимальную по исходным критериям Вальда или Сэвиджа. Проверить существование $(W-Sav)(\alpha)$ -синтезированных решений для каждого значения $\alpha \in (0,1)$ принципиально невозможно, поскольку эти значения составляют бесконечное множество. В связи с этим возникает проблема синтеза критерием Вальда – Сэвиджа, состоящая в отыскании условий, при которых критерий Вальда – Сэвиджа не обладает свойством синтеза.

В [5] приведено аналитическое решение этой проблемы, т.е. найдены аналитические необходимые и достаточные условия на игру, при которых $(W-Sav)(\alpha)$ -критерий не обладает свойством синтеза и, следовательно, применять его для отыскания синтезированных стратегий в этом случае не имеет смысла.

Цель настоящей статьи – анонсировать геометрическое решение указанной проблемы и проиллюстрировать приложение полученных результатов на анализе экономической задачи [5] оптимального выбора технологического способа производства.

Материалы и методы исследования

Показатель эффективности $(W-Sav)_i(\alpha)$, который можно представить так: $(W-Sav)_i(\alpha) = (W_i + Sav_i)\alpha - Sav_i$, является линейной функцией аргумента $\alpha \in [0,1]$. Стало быть, его графиком в системе координат $\alpha o (W-Sav)_i(\alpha)$ является отрезок $(-Sav_i)W_i$

Рис. 1. Графики показателей эффективности стратегий и цены игры по критерию Вальда – Сэвиджа

с левым концом $(-Sav_i) = (W-Sav)_i(0)$ и правым концом $W_i = (W-Sav)_i(1)$. Следовательно, графиком цены игры $(W-Sav)_s(\alpha)$ является верхняя огибающая m отрезков $(-Sav_i)W_i$, $i \in I$, которая представляет собой ломаную, состоящую не более чем из m звеньев. На рис. 1 изображены отрезки $(-Sav_i)W_i$ – графики $(W-Sav)_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 7$ и ломаная $(-Sav_s)W_s$ с двумя звеньями – график цены игры $(W-Sav)_s(\alpha)$.

Рассмотрим величины $W(S^{O(Sav)}) = \max\{W_i : A_i \in S^{O(Sav)}\}$ и $Sav(S^{O(W)}) = \min\{Sav_i : A_i \in S^{O(W)}\}$, на основании которых определим следующие множества стратегий: $(S^{O(W)})^{Sav} = \{A_i \in S^{O(W)} : Sav_i = Sav(S^{O(W)})\}$ – множество W -оптимальных стратегий A_i , показатель неэффективности которых Sav_i равен $Sav(S^{O(W)})$; $(S^{O(Sav)})^W = \{A_i \in S^{O(Sav)} : W_i = W(S^{O(Sav)})\}$ – множество Sav -оптимальных стратегий A_i , показатель эффективности которых W_i равен $W(S^{O(Sav)})$.

Каждая стратегия $A_i \in S$ порождает в системе координат $Sav_i o W_i$ точку $N_i = (-Sav_i, W_i)$ с абсциссой $(-Sav_i)$ и ординатой W_i . На рис. 2 изображены точки B, C, D, N_i , порождаемые стратегиями A_i , графики показателей, эффективности которых изображены на рис. 1.

Мы покажем, как по расположению точек N_i можно ответить на вопрос, обладает ли критерий Вальда – Сэвиджа свойством синтеза или нет.

Построим в системе координат $Sav_i o W_i$ (рис. 2) точки

$$B = (-Sav(S^{O(W)}), W_s), \quad C = (-Sav_s, W_s),$$

$$D = (-Sav_s, W(S^{O(Sav)})).$$

Рис. 2. Точки B, C, D, N_i , соответствующие отрезкам на рис. 1

Результаты исследования и их обсуждение

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны: а) существует стратегия A_i , порождающая точку $N_i = C$; б) множество стратегий, оптимальных и по критерию Вальда, и по критерию Сэвиджа, не пусто; в) ломаная $(W-Sav)_s(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, вырождается в отрезок $(-Sav_s)W_s$; д) множество $(W-Sav)(\alpha)$ -оптимальных стратегий, совпадает с множеством стратегий, оптимальных и по критерию Вальда, и по критерию Сэвиджа:

$$S^{O[(W-Sav)(\alpha)]} = S^{O(W)} \cap S^{O(Sav)}, \alpha \in [0,1]. \quad (2)$$

Теорема 2. Из каждого из утверждений теоремы 1 следует, что критерий Вальда – Сэвиджа не обладает свойством синтезирования.

Следствие 1. Если число стратегий $m = 2$, то критерий Вальда – Сэвиджа свойством синтезирования не обладает.

Пусть Q_1 – внутренность треугольника BCD (рис. 3), Q_2 – внутренность гипотенузы BD прямоугольного треугольника BCD (рис. 3) и $Q = Q_1 \cup Q_2$.

Рис. 3. Области Q_1 и Q_2

Теорема 3. Если не существует стратегии, порождающей точку C , то следующие утверждения эквивалентны: а) область Q не содержит точек N_i , $i \in I$; б) критерий Вальда – Сэвиджа не обладает свойством синтезирования; в) множество стратегий, оптимальных по критерию Вальда – Сэвиджа, имеет следующую структуру $S^{O[(W-Sav)(\alpha)]} = S^{O(Sav)}$, при $\alpha = 0$; $= (S^{O(Sav)})^W$, при $0 < \alpha < \alpha_{(W-Sav)}$; $= (S^{O(Sav)})^W \cup (S^{O(W)})^{Sav}$, при $\alpha = \alpha_{(W-Sav)}$; $= (S^{O(W)})^{Sav}$, при $\alpha_{(W-Sav)} < \alpha < 1$; $= S^{O(W)}$, $= S^{O(W)}$, при $\alpha = 1$, где

$$\alpha_{(W-Sav)} = [Sav(S^{O(W)}) - Sav_s] / [Sav(S^{O(W)}) - Sav_s + W_s - W(S^{O(Sav)})]. \quad (3)$$

Задача [5]. Предприятие должно произвести X единиц продукции одним из четырех технологических способов. Спрос на количество этой продукции носит случайный характер и, как показывает маркетинговый анализ за прошлые периоды, может принимать значения 25, 35, 45 и 50 единиц. Производственные затраты TC_i на изготовление X единиц продукции i -м ($i = 1, 2, 3, 4$) технологическим способом выражаются формулой

$$TC_i = FC_i + c_i X, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4)$$

где $FC_1 = 145$, $FC_2 = 70$, $FC_3 = 180$, $FC_4 = 110$ условных денежных единиц (уе) – постоянные затраты и $c_1 = 3$, $c_2 = 5$, $c_3 = 2$, $c_4 = 4$ уе – удельные затраты на производство единицы продукции. Перед предприятием стоит задача выбора одного из четырех технологических способов изготовления продукции, при котором производственные затраты будут минимальными.

Решение. Применим модель «Игра с природой», в которой игрок A – предприятие; стратегии A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, – «выбрать для изготовления продукции i -й технологический способ»; природа Π – спрос на изготавливаемую продукцию; состояния природы – $\Pi_1 = 25$, $\Pi_2 = 35$, $\Pi_3 = 45$, $\Pi_4 = 50$ единиц спроса; выигрыши a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3, 4$ – производственные затраты, вычисляемые по формуле (4): $a_{ij} = -(FC_i + c_i \Pi_j)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Из подсчитанных выигрышей a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3, 4$, формируем платежную матрицу A , находим показатели благоприятности состояний природы β_j , $j = 1, 2, 3, 4$, вычисляем риски r_{ij} , $i, j = 1, 2, 3, 4$, и формируем матрицу рисков R . В качестве принципа оптимальности стратегий выберем критерий Вальда – Сэвиджа.

$$A =$$

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	W_i
A_1	-220	-250	-280	-295	-295
A_2	-195	-245	-290	-320	-320
A_3	-230	-250	-270	-280	-280
A_4	-210	-250	-290	-310	-310
β_j	-195	-245	-270	-280	

$$R =$$

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Sav_i
A_1	25	5	10	15	25
A_2	0	0	20	40	40
A_3	35	5	0	0	35
A_4	15	5	20	30	30

Рис. 4. Точки N_i , $i = 1, 2, 3, 4$ Рис. 5. Символическое расположение отрезков $(-Sav_i)W_i$ соответствующих точкам N_i на рис. 4

В матрицах A и R находим соответственно W -показатели W_i и Sav -показатели Sav_i , $i = 1, 2, 3, 4$. В системе координат $Sav_i o W_i$, откладывая Sav -показатели со знаком "–" на горизонтальной оси $oSav_i$, а W -показатели – на вертикальной оси oW_i , строим точки $N_1 = (-25, -295) = D$, $N_2 = (-40, -320)$, $N_3 = (-35, -280) = B$, $N_4 = (-30, -310)$ (рис. 4). Из столбцов « W_i » и « Sav_i » матриц A и R очевидно, что $W_s = -280$, $Sav(S^{O(W)}) = 35$, $Sav_s = 25$, $W(S^{O(Sav)}) = -295$. Среди построенных точек N_i , $i = 1, 2, 3, 4$, нет точки $C = (-Sav_s; W_s) = (-25, -280)$ и ни одна из построенных точек не попадает в область $Q = Q_1 \cup Q_2$ (рис. 4). Поэтому по теореме 3 критерий Вальда – Сэвиджа не обладает свойством синтеза, т.е. в данной игре нет синтезированных стратегий. По формуле (3) получаем $\alpha^{(W, Sav)} = 0,4$. Из столбцов « W_i » и « Sav_i » матриц A и R очевидно, что, $S^{O(W)} = (S^{O(W)})^{Sav} = \{A_3\}$, $S^{O(Sav)} = (S^{O(Sav)})^W = \{A_1\}$. Тогда по утверждению с) теоремы 3 оптимальные несинтезированные стратегии образуют множество $S^{O[(W, Sav)(\alpha)]} = \{A_1\}$, при $0 \leq \alpha < 0,4$; $= \{A_1, A_3\}$, при $\alpha = 0,4$; $= \{A_3\}$, при $0,4 < \alpha \leq 1$.

Условно-геометрическая интерпретация данной задачи представлена на рис. 5.

Закключение

В статье получены геометрические, легко проверяемые необходимые и достаточные условия, при которых критерий Вальда – Сэвиджа не обладает свойством синтеза

и, следовательно, при этих условиях применять его не имеет смысла. Анонсированные результаты являются новыми и имеют теоретическо-научное значение, поскольку привносят некий вклад в развитие теории игр с природой. Они имеют и практическую значимость, являясь новым методом в анализе задач по принятию финансово-экономических решений в условиях неопределенности.

Список литературы

1. Wald A. Statistical decision functions. N.Y.: Wiley; L., Chapman & Hall, 1950. 179 p.
2. Лабскер Л.Г. Теория критериев оптимальности и экономические решения: монография. М.: КНОРУС, 2020. 742 с.
3. Savage L.J. The theory of statistical decision. J. Amer. Statist. Assoc. 1951. Vol. 46. No. 1. P. 55–67.
4. Лабскер Л.Г., Ященко Н.А., Амелина А.В. Очередность кредитования банком корпоративных заемщиков: формирование приоритетного порядка на основе синтетического критерия Вальда – Сэвиджа: монография. Saarbrücken (Germany): LAP (LAMBERT Academic Publishing) GmbH & Co. KG, 2012. 230 с.
5. Лабскер Л.Г. Свойство синтеза критерия Вальда – Сэвиджа и его экономическое приложение // Экономика и математические методы. 2019. Т. 55. № 4. С. 102–116.
6. Кухаренко А.Ю., Халиков М.А. Выбор портфеля неинституционального инвестора с использованием критерия Вальда – Сэвиджа // Фундаментальные исследования. 2019. № 5. С. 62–68.
7. Gorskiy M.A., Khalikov M.A., Kukhareno A.Y. Selection of priority sequence of investors portfolio with the use of the supply chain management in the criteria of «Against nature» game. International Journal of Supply Chain Management. 2019. Т. 8. № 3. P. 301–308.
8. Наталенко К.И. Моделирование эффективности импортных операций на основе критерия Вальда – Сэвиджа и финальных вероятностей Марковского процесса // Научные записки молодых исследователей. 2018. № 4. С. 14–20.
9. Анохина П.Н., Беляева Д.И., Димитриев А.М., Максимова Д.А. Оптимизация внутрифирменного кредитования подразделений иерархической производственной структуры с критериями игры с природой // Вестник Алтайской академии экономики и права. 2020. № 1 (Ч. 1). С. 4–16.