УДК 330.44

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ И РЕШЕНИЯ БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ

Асхакова Ф.Х.

ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева»,
Карачаевск, e-mail: ashakova@bk.ru

В работе рассматриваются методы построения матрицы затрат балансовой модели, исследуется построение матрицы затрат из таблицы межотраслевого баланса и построение матрицы затрат путем решения обратной задачи балансовой модели. Приводится описание таблицы межотраслевого баланса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской Республики (МСХ КЧР), построенной из усредненных статистических данных за 2015–2019 гг. Данные таблицы межотраслевого баланса применяются для построения матрицы затрат балансовой модели МСХ КЧР. Рассматривается второй метод определения элементов матрицы затрат, когда известны только значение вектора конечного спроса и значение вектора валового выпуска. Для второго способа определения элементов матрицы затрат балансовой модели МСХ КЧР используется метод квадратичного программирования. Полученные обоими способами матрицы затрат применяются для решения оптимизационной задачи балансовой модели МСХ КЧР, а именно для оптимального планирования его производства на 2021 г. Далее в работе приводится сравнительный анализ полученных в результате решения оптимизационных задач валовых выпусков отраслей МСХ КЧР. Полученные результаты решения отличаются не более чем на 1,5%. Результаты работы могут быть применены хозяйствующими субъектами для построения их балансовых моделей и решения оптимизационных задач на основе этих балансовых моделей.

Ключевые слова: модель Леонтьева, балансовая модель, линейное программирование, квадратичное программирование, обратные задачи, министерство сельского хозяйства Карачаево-Черкесской Республики

ANALYSIS OF METHODS FOR BUILDING AND SOLVING THE BALANCE MODEL

Ashakova F.Kh.

Karachay-Cherkessia State University U.D. Aliyev, Karachaevsk, e-mail: ashakova@bk.ru

The paper discusses methods of constructing the input matrix balance models, examines the construction of the input matrix from a table of interindustry balance and build the input matrix by solving the inverse balance model. The article describes the table of inter-industry balance of the Ministry of agriculture of the Karachay-Cherkess Republic (MA of the KChR), constructed from the average statistical data for 2015-2019. Data from the intersectoral balance table are used to build the cost matrix of the balance model of the Ministry of agriculture of the KChR. The second method for determining the elements of the cost matrix is considered, when only the value of the final demand vector and the value of the gross output vector are known. For the second method of determining the elements of the cost matrix of the balance model of the Ministry of agriculture of the KChR, the method of quadratic programming is used. The cost matrices obtained by both methods are used to solve the optimization problem of the balance model of the Ministry of agriculture of the KChR, namely, for optimal planning of its production for 2021. Further, the paper provides a comparative analysis of the gross output of the branches of the Ministry of agriculture of the KChR obtained as a result of solving optimization problems. The obtained results of the solution differ by no more than 1.5%. The results of the work can be applied by business entities to build their balance models and solve optimization problems based on these balance models.

Keywords: Leontiev model, balance model, linear programming, quadratic programming, inverse problems, Ministry of agriculture of the Karachay-Cherkess Republic

Применение балансовых моделей охватывает широкий спектр. Их применяют как внутри отдельного хозяйствующего субъекта, региона, страны, так и нескольких стран, объединённых экономическим союзом. Немалое количество работ посвящено исследованию балансовых моделей [1–3].

Известно, что балансовая модель является системой уравнения, устанавливающей баланс между производимой отраслями продукцией и потребностью в ней. К одной из таких моделей относится модель Леонтьева [4–6].

Рассмотрим модель Леонтьева вида:

$$x = Ax + f \quad (1)$$

или

$$(I - A)x = f, \quad (2)$$

где $x \in R_+^n$ – вектор, элементы которого обозначают объёмы валовых выпусков отраслей $R_+^n = \{col(x_1, \dots, x_n) : x_i \in [0, \infty), i = 1, 2, \dots, n\}$;

$f \in R_+^n$ – вектор, элементы которого обозначают объемы конечного спроса отраслей;
 A – квадратная матрица с элементами $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \geq 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), которые обозначают расходы продукта i -й отрасли в j -й отрасли.

Информационному обеспечению данной модели относят матрицу затрат. Так как (1) является статической, то $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ с течением некоторого периода практически не изменяются.

По некоторым причинам построение матрицы затрат становится проблемным. Обычно при ее построении применяют данные таблицы межотраслевого баланса хозяйствующего субъекта, построенного из статистических данных. Известно, что если построение таблицы межотраслевого баланса по тем или иным причинам становится невозможным, то существует другой метод построения матрицы затрат, который заключается в решении обратной задачи модели (1) при условии, если известны коэффициенты вектора валового выпуска и известны коэффициенты вектора конечного спроса.

К актуальности описанных в работе исследований относятся методы построения матрицы затрат. В работе рассматриваются два метода построения рассматриваемой матрицы. Первым является метод нахождения элементов матрицы затрат из таблицы межотраслевого баланса, построенного из статистических данных хозяйствующего субъекта, а вторым методом нахождения матрицы затрат является решение обратной задачи модели (1). В обоих случаях могут быть погрешности при вычислении. Поэтому для планирования производства в работе применяются матрицы, полученные обоими методами, а также анализируются полученные результаты.

Цель исследования: из статистических данных МСХ КЧР построить таблицу его межотраслевого баланса. Найти элементы матрицы затрат из построенной таблицы межотраслевого баланса МСХ КЧР. Вос-

пользовавшись известным значением вектора конечного спроса и известным значением вектора валового выпуска, найти значение матрицы затрат, решая обратную задачу модели (1). Применить полученные матрицы для нахождения оптимального планирования валового выпуска продукции МСХ КЧР. Проанализировать полученные результаты.

Материалы и методы исследования

В качестве материалов исследования применяются статистические данные за 2015–2019 гг. МСХ КЧР и модель Леонтьева. В работе применяются метод квадратичного программирования – для решения обратной задачи, и метод линейного программирования – для решения оптимизационной задачи.

Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим два способа построения матрицы затрат балансовой модели.

Известно, что таблица межотраслевого баланса имеет вид (табл. 1).

Рассмотрим взаимосвязь величин табл. 1. Величину x_i из табл. 1 связывают с величинами x_{ij} и f_i следующим соотношением:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + f_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Выразим ее в виде системы уравнений:

[illegible]

Известно, что коэффициенты a_{ij} :

$$\frac{x_{ij}}{x_i} = a_{ij} = const, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда найдем:

$$x_{ij} = a_{ij} x_i, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Таблица 1

Общая схема межотраслевого баланса

Производящие	Потребляющие					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	...	N		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}	f_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	f_2	x_2
...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nn}	f_n	x_n

Подставляя последнее выражение в (3), получаем следующую систему уравнений:

[illegible]

Если выразить

$$\begin{pmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & (1-a_{nn}) \end{pmatrix} = (I - A),$$

и ввести векторное обозначение:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix},$$

то система (4) запишется в виде (2).

Первый способ построения элементов матрицы затрат – это когда для вычисления элементов матрицы затрат A применяются данные табл. 1, т.е. вычисляются по формуле:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_i}. \quad (5)$$

Во втором способе элементы матрицы затрат A получаем с помощью решения обратной задачи модели (1), по аналогии работы [7] решение сводится:

$$|\mathbf{x}(I - A) - f|^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

с ограничениями

$$a_{ij} \geq 0, \quad x_i \geq 0,$$

$$f_i \geq 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

После построения матрицы A применяем методы оптимизации для нахождения

ния оптимального решения модели (2). Пусть в (2)

$$x \geq \theta. \quad (8)$$

По аналогии работы [8, с. 31] решаем оптимизационную задачу (2), а именно, на множестве решений (2) будем рассматривать целевую функцию:

$$\sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \max, \quad (9)$$

при этом будем предполагать, что x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют условиям (2), (8).

Описанную выше методику применим для оптимального планирования производства МСХ КЧР на 2021 г. Для этого применим описанные выше способы построения матрицы затрат.

В начале построим таблицу межотраслевого баланса, для этого используем статистические данные МСХ КЧР за 2015–2019 гг. (тыс. руб.) (табл. 2).

Из данных табл. 2, вычисляя по формуле (5), получаем:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,001 & 0,54 \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} 96678,6 \\ 6805 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 13826,5 \\ 14825,8 \end{pmatrix}.$$

В качестве второго способа построения модели рассмотрим случай, когда известны только две величины балансовой модели, такие как f и x , равные:

$$f = \begin{pmatrix} 96678,6 \\ 6805 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 13826,5 \\ 14825,8 \end{pmatrix},$$

а элементы матрицы A находим с помощью решения задачи квадратичного программирования (6), с ограничениями (7).

Опишем алгоритм решения обратной задачи модели (1) в программе Microsoft Excel.

1. Вводим элементы единичной матрицы I , той же размерности что и A .

2. Вводим начальные значения $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вводим значения элементов вектора x .

Таблица 2

Таблица межотраслевого баланса МСХ КЧР

Производящие		Потребляющие		Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2		
1	Отрасль растениеводства	2765,3	1382,65	9678,6	13826,5
2	Отрасль животноводства	14.83	8005.93	6805	14825.8

4. Вводим значения элементов вектора f .
5. Вычисляем $(I - A)$.
6. Вычисляем $(I - A)x$.
7. Вычисляем $|x(I - A) - f|^2$.
8. Вводим целевую функцию (6) и ограничения (7).
9. Вводим параметры поиска решения.

Применяя описанный алгоритм в программе Microsoft Excel, получаем следующий результат:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,09 \\ 0,355 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Из полученных результатов видно, что результаты, полученные a_{11} и a_{12} в обоих случаях, не имеют существенных отличий. Значение коэффициента a_{21} во втором случае на 0,354 больше, чем в первом, а значение a_{22} в первом случае на 0,34 больше, чем во втором.

Далее рассмотрим, как влияют отличия в полученных матрицах на результаты решений оптимизационного планирования производства МСХ КЧР. Для этого найдем оптимальное планирование производства МСХ КЧР с применением полученных матриц.

Найдем оптимальную величину валового выпуска для случая, если к концу 2021 г. МСХ КЧР планирует увеличить величину конечного спроса на 40%, т.е.

$$f^* = \begin{pmatrix} 13549,97 \\ 9527,06 \end{pmatrix}.$$

Опишем алгоритм решения задачи (9) с ограничениями (2), (8) в программе Microsoft Excel с применением матрицы затрат, которая была получена из табл. 2.

1. Вводим I той же размерности, что и A .
2. Вводим $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,001 & 0,54 \end{pmatrix}$.
3. Вводим запланированное значение $f^* = \begin{pmatrix} 13549,97 \\ 9527,06 \end{pmatrix}$.
4. Вводим в качестве начальных значений вектора x : $x_0 = \begin{pmatrix} 13826,5 \\ 14825,8 \end{pmatrix}$.
5. Вычисляем $(I - A)$.
6. Вычисляем $(I - A)x_0$.
7. Вводим (9).
8. Вводим ограничения (2) и (8).
9. Вводим параметры поиска решения.

Применяя данный алгоритм, получаем следующее решение:

$$x = \begin{pmatrix} 19531,64 \\ 20753,46 \end{pmatrix}.$$

По аналогии рассмотрим алгоритм решения задачи в программе Microsoft Excel с применением матрицы затрат, которая была получена с помощью решения обратной задачи модели (2).

1. Вводим I той же размерности, что и $\tilde{A}$.
2. Вводим $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,09 \\ 0,355 & 0,2 \end{pmatrix}$.
3. Вводим запланированное значение $f^* = \begin{pmatrix} 13549,97 \\ 9527,06 \end{pmatrix}$.
4. Вводим в качестве начальных значений вектора x : $x_0 = \begin{pmatrix} 13826,5 \\ 14825,8 \end{pmatrix}$.
5. Вычисляем $(I - \tilde{A})$.
6. Вычисляем $(I - \tilde{A})x_0$.
7. Вводим (9).
8. Вводим ограничения (2) и (8).
9. Вводим параметры поиска решения.

Применяя данный алгоритм, получаем следующее решение:

$$x = \begin{pmatrix} 19237,58 \\ 20445,5 \end{pmatrix}.$$

Сравним результаты решения задачи. Решая задачу с помощью матрицы затрат, которая была получена из таблицы межотраслевого баланса МСХ КЧР, получили $x_1 = 19531,64$, $x_2 = 20753,46$. Решая задачу с помощью матрицы затрат, полученной путем решения обратной задачи, получили $\tilde{x}_1 = 19237,58$, $\tilde{x}_2 = 20445,5$. Рассматривая разницу результатов решения в процентах, получим, что результат решения первой отрасли при решении задачи с помощью матрицы затрат, полученной из решения обратной задачи (1), на 1,5% меньше результата решения с применением матрицы затрат, которая была построена из таблицы межотраслевого баланса МСХ КЧР. Результаты второй отрасли, при решении задачи с помощью матрицы затрат, полученной из решения обратной задачи, на 1,4% меньше результата решения с применением матрицы затрат, построенной из таблицы межотраслевого баланса МСХ КЧР.

Выводы

Таким образом, из результатов исследования видно, что результаты оптимального планирования производства МСХ

КЧР на 2021 г., полученные с применением матрицы затрат, построенной из статистических данных, и результаты оптимального планирования производства МСХ КЧР на 2021 год, полученные с применением матрицы затрат, полученной из решения обратной задачи, отличаются на 1,5%.

Результаты данной работы можно применить для построения и решения балансовых моделей хозяйствующих субъектов.

Список литературы

1. Дужински Р.Р., Торопцев Е.Л., Мараховский А.С. Равновесное и межотраслевое моделирование устойчивости экономических систем // Экономический анализ: теория и практика. 2018. Т. 17. № 8 (479). С. 1528–1544.
2. Гнеушев И.А., Колесникова И.В., Костин Д.В., Сапронов Ю.И. Прогибы сжатой балки на двойном упругом основании (в обобщенной модели Власова-Леонтьева) // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2018. № 2. С. 173–181.
3. Попова О.Г., Ариничева И.В., Ариничев И.В., Сергеева И.О. Методика единой оценки качества товара на основе

линейной модели В. Леонтьева // Естественно-гуманитарные исследования. 2020. № 30 (4). С. 141–151.

4. Романов Б.А. Использование модели «затраты-выпуск» для планирования производственной программы группы взаимодействующих предприятий // Организатор производства. 2018. Т. 26. № 1. С. 73–83.

5. Шандра И.Г. Модель Леонтьева межотраслевого баланса и линейная модель обмена // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2017. Т. 4. № 1. С. 221–225.

6. Соломонова Е.В., Лелес А.Л. Сетевая модель многоотраслевой экономики. Модель Леонтьева «затраты-выпуск» // Молодой ученый. 2015. № 1 (81). С. 292–294.

7. Асхакова Ф.Х. Обратная задача модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов // Прикладная математика XXI века: современные проблемы математики, информатики и моделирования Материалы всероссийской научно-практической конференции (г. Краснодар, 24–26 апреля 2019 г.). Краснодар: Издательство ФГБУ «Российское энергетическое агентство» Минэнерго России Краснодарский ЦНТИ – филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России, 2019. С. 41–44.

8. Асхакова Ф.Х. Векторная оптимизация в балансовой модели Леонтьева – Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2007. Т. 19. № 45. С. 30–33.