УДК 621.398.97

О ДВУХ МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Волынская А.В.

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург, e-mail: anna-volinskaya@mail.ru

Большинство современных систем передачи информации используют широкополосные сигналы. В теории информации показано, что если спектр помех не белый, то повысить пропускную способность можно путем адаптации спектра полезного сигнала к неравномерному спектру помех. Также теория информации говорит о том, что наиболее информативным будет такой сигнал, закон распределения плотности вероятности которого дополняет закон распределения помех до нормального закона. В связи с этим встает задача преобразования закона распределения сигнала под заданный закон, определяемый, в свою очередь, помехой. Задача мониторинга спектра помех в реальном времени решена, например, в стандарте IEEE 802.22. В данной статье показана принципиальная возможность преобразования закона распределения широкополосного сигнала с помощью нелинейного оператора и предложены два способа нахождения такого оператора: метод изоклин и метод кусочно-линейной аппроксимации.

Ключевые слова: каналы телемеханики, шумоподобные сигналы, адаптация к помехам, закон распределения плотности вероятности

ABOUT TWO METHODS OF APPROXIMATE CREATION OF THE OPERATOR OF TRANSFORMATION OF LAWS OF DISTRIBUTION OF CASUAL PROCESSES

Volynskaya A.V.

Ural state university of railway transport, Ekaterinburg, e-mail: anna-volinskaya@mail.ru

The majority of modern systems of information transfer use broadband signals. In the theory of information it is shown that if a range of hindrances not white, it is possible to increase capacity by adaptation of a range of a useful signal to an uneven range of hindrances. Also the theory of information says that such signal will be the most informative, the law of distribution of which density of probability supplements the law of distribution of hindrances to the normal law. In this regard there is a problem of transformation of the law of distribution of a signal under the set law determined, in turn, by a hindrance. The problem of monitoring of a range of hindrances in real time is solved, for example, in the IEEE 802.22 standard. Basic possibility of transformation of the law of distribution of a broadband signal by means of the nonlinear operator is shown in this article and two ways of finding of such operator are offered: method isowedge and method of piecewise and linear approximation.

Keywords: channels of telemechanics, noise-type signals, adaptation to hindrances, law of distribution of density of probability

В работах автора [1, 2, 3] приведены результаты исследований по повышению надежности каналов телемеханики за счет адаптации управляющих сигналов к характеристикам канала, прежде всего к помехам.

В классической литературе по теории информации, например в [5], показано, что для извлечения максимального количества информации из сигнала на входе приемника (сигнал + помеха) необходимо полезный сигнал формировать таким, чтобы его закон распределения дополнял закон распределения помехи до нормального (гауссового) распределения.

Пусть сигнал $x_0(t)$ имеет закон распределения $p_0(x)$. Этот сигнал необходимо преобразовать в $y_1(t)$ с законом распределения $p_1(y)$. Характеристику преобразования обозначим некоторым оператором D:

$$y = y(x) = D\left[x_0(t)\right]. \qquad (1)$$

Линейный оператор обладает ограниченными возможностями преобразования, поэтому будем искать его в классе нелинейных преобразователей. При любом нелинейном однозначном преобразовании некоторому участку dx оси x соответствует некоторый участок dy оси y так, что

$$p_0(x)dx = p_1(y)dy$$

или

$$p_1(y)dy - p_0(x)dx = 0. \qquad (2)$$

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделёнными переменными. Задача состоит в отыскании закона преобразования $y = y(x)$.

Запишем уравнение (2) в виде

$$\int_{-\infty}^{y} p_1(y)dy = \int_{-\infty}^{x} p_0(x)dx \qquad (3)$$

и для нормального распределения

$$F(y)=\int_{-\infty}^{x} p_0(x)dx. \qquad (4)$$

Смысл выражения (3) следующий: при заданных законах p_0 и p_1 зависимость $y = y(x)$ должна быть подобрана так, чтобы интегральные функции их распределений совпадали.

В работе [4] приведены три примера, когда уравнение (3) может быть разрешено явно относительно y.

1. Сигнал $x_0(t)$ преобразуется к равномерному распределению

$$p_1(y) = A; \quad -a \le y \le a; \quad x_0 = 0.$$

Решение дает

$$y=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{x} p_0(x)dx-a; \quad -a \le y \le a.$$

2. Сигнал $x_0(t)$ преобразуется к релеевскому распределению

$$p_1(y)=\frac{y}{\sigma^2}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}.$$

Решение дает

$$y=\sigma\sqrt{2\ln\frac{1}{1-\int_{-\infty}^{x} p_0(x)dx-c}}; \quad y \ge 0.$$

3. Сигнал $x_0(t)$ преобразуется к распределению гармонического колебания со случайной равномерно распределенной начальной фазой

$$p_1(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}; \quad x_0=0.$$

Решение дает

$$y=\sin\left[\pi\int_{-\infty}^{x} p_0(x)dx+\frac{3}{2}\pi\right].$$

Маловероятно, что на практике мы встретим эти ситуации, они приведены скорее как иллюстрация того, как можно реализовать статистическое согласование законов распределения сигналов и помех. Однако ясно, что такое согласование в принципе возможно. Поскольку законы распределения – неотрицательные функции, то и производная от характеристики преобразования закона распределения будет неотрицательной, следовательно, и сами характеристики преобразования всегда монотонные однозначные функции. Для них обратные преобразования тоже однозначные и монотонные.

Рассмотрим два способа приближенного построения характеристик преобразования.

Если законы распределения заданы аналитически, то можно применить метод изоклин. Для этого уравнение (3) перепишем иначе

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{p_0(y)}{p_1(y)}. \qquad (5)$$

Придавая y' различные постоянные значения k в интервале 0...∞, это уравнение можно разрешить относительно y. Кривые $y(x, k)$ называются изоклинами. Данная кривая во всех точках может пересекаться искомой характеристикой под одним и тем же углом, тангенс которого равен k.

Для примера рассмотрим случай преобразования сигнала к нормальному распределению. Уравнение изоклины будет иметь следующий вид:

$$\sqrt{2\pi}\sigma e^{\frac{y^2}{2\sigma^2}}p_0(x)=k;$$

$$y(x,k)=\sigma\sqrt{2\ln\frac{k}{\sqrt{2\pi}\sigma p_0(x)}}.$$

Придавая различные значения k, получим семейство изоклин. На каждой изоклине можно указать наклон характеристики в виде черточек, проведенных под углом, тангенс которого равен значению k для данной изоклины.

На рис. 1 изображено семейство изоклин с нанесенными на них наклонами для некоторого закона распределения $p_0(x)$.

Если семейство достаточно полное, то по нему нетрудно провести характеристику преобразования. Одна из них показана на рис. 1.

Когда законы распределения заданы графически, удобней применить метод кусочно-линейной аппроксимации.

На рис. 2 построена характеристика преобразования равномерно распределенного процесса к нормально распределенному процессу. Первую точку выберем на пересечении средних линий распределений (точка 0).

В пределах кривой $p_0(x)$ разбиваем ось x на малые отрезки, не обязательно равные. После выбора первой точки характеристики мы можем найти по формуле (5) касательную

$$y_0'=\frac{p_0(x_0)}{p_1(y_0)}.$$

В числителе стоит ордината кривой в точке x_0, а в знаменателе – ордината кривой $p_1(y)$ в точке y_0, которые берем из рис. 2. Действительную кривую $y = y(x)$ на участке 0...1 заменяем отрезком прямой, проведенным под углом, тангенс которого равен найденному значению y'. Из точки 1 проводим прямую, параллельную оси абсцисс, и на-

ходим точку y_1. Далее измеряем ординаты $p_0(x_1)$ и $p_1(y_1)$ и находим

$$y_1' = \frac{p_0(x_1)}{p_1(y_1)},$$

а по y_1' находим угол наклона касательной в точке 1 и проводим ее до точки 2. Затем из точки 2 проводим линию, параллельную оси абсцисс, и находим точку y_2, равную $y_2 = y(x_2)$. Далее измеряем ординаты $p_0(x_2)$ и $p_1(y_2)$ и находим соответствующее значение y_2' и так далее. Левую ветвь характеристики строим аналогично, двигаясь от точки 0 влево.

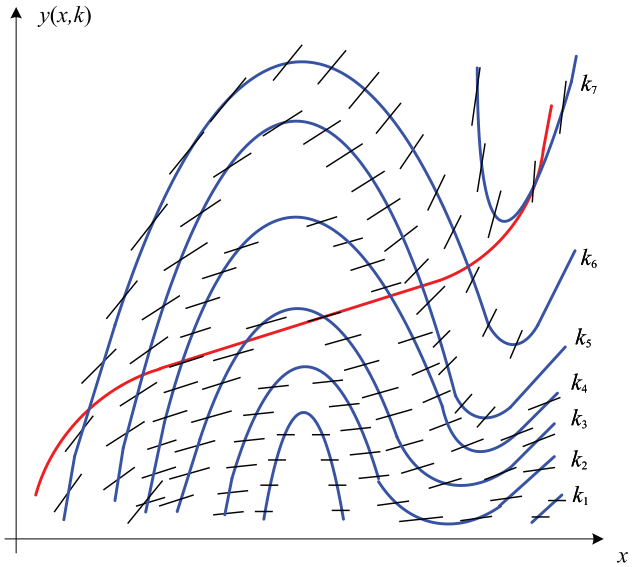

Рис. 1. Построение характеристики преобразования методом изоклин

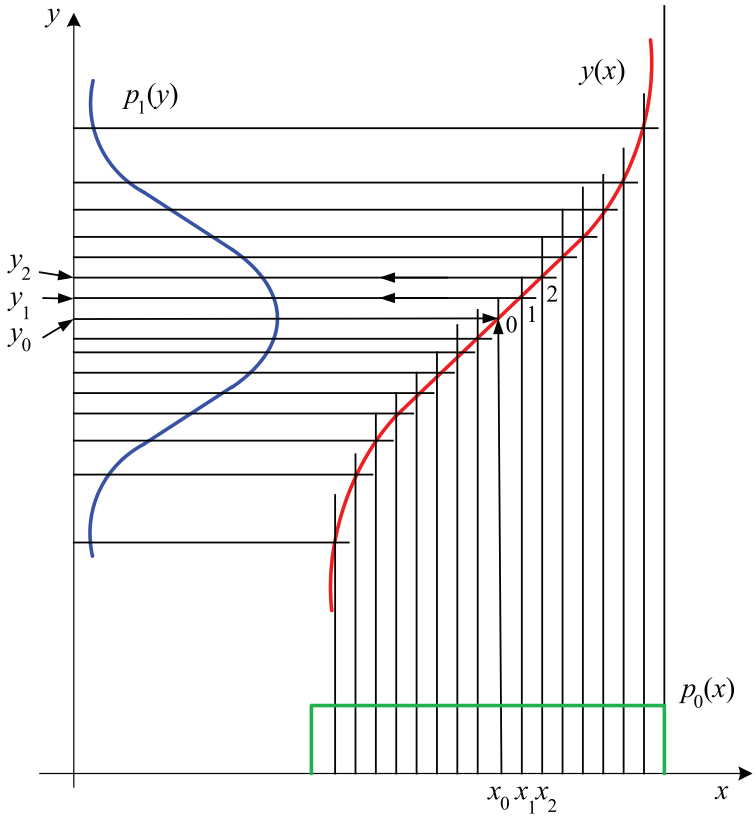

Рис. 2. Построение характеристики преобразования процесса с равномерным законом к нормальному закону

В сущности, этот метод есть тоже метод изоклин, но он не требует построения самих изоклин. Важно заметить, что при построении каждого отрезка мы используем действительные ординаты кривых в выбранной точке, поэтому не происходит накопление ошибок, допущенных на предыдущих отрезках характеристики.

Если теперь сместить $p_0(x)$ влево на величину x_0, а $p_1(y)$ – вниз на величину y_0, то характеристика без изменения наклона сместится так, что точка 0 совпадет с началом координат, и мы получим действительную характеристику.

Список литературы

1. Волынская А.В., Сергеев Б.С. Предпосылки применения псевдослучайных сигналов-переносчиков в каналах телемеханики железнодорожного транспорта // Транспорт: наука, техника, управление: Научный информационный сборник РАН ВИНИТИ, 2011. – Вып. 6. – С. 39–41.

2. Волынская А.В. Пробные эксперименты по изучению спектральных и статистических характеристик электромагнитных помех в каналах телемеханики железнодорожного транспорта // Семинар докторантов УрГУПС: сб. науч. докл. / под науч. ред. С.П. Баутина. – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2012. – С. 29–40.

3. Волынская А.В. Интеллектуальный канал телемеханики // Транспорт: наука, техника, управление: Научный информационный сборник РАН ВИНИТИ, 2013. – Вып. 4. – С. 13–16.

4. Волынская А.В. Исследование способов адаптации сигналов к помехам в интеллектуальном канале телемеханики железнодорожного транспорта // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды XV Международной конф. – Самара: Самарский научный центр РАН, 2013. – С. 577–581.

5. Голдман С. Теория информации. – М.: Изд. иностранной литературы, 1957. – 446 с.

References

1. Volynskaya A.V., Sergeev B.S. *Transport: nauka, tehnika, upravlenie – nauchnyi informatsionnyi sbornik RAN VINITI*, 2011, vyp. 6, pp. 39–41.

2. Volynskaya A.V. *Seminar doktorantov UrGUPS* (Seminar of doctoral candidates of UrGUPS). Ekaterinburg, 2012, pp. 29–40.

3. Volynskaya A.V. *Transport: nauka, tehnika, upravlenie – nauchnyi informatsionnyi sbornik RAN VINITI*, 2013, vyp. 4, pp. 13–16.

4. Volynskaya A.V. *Trudy XV Mezhdunarodnoy konf.* «*Problemy upravleniya I modelirovaniya v slozhnyh sistemah*» (Proc. XVth Int.Conf. «Problems of management and modeling in difficult systems»), Samara, 2013, pp. 577–581.

5. Goldman S. *Teoriya informatsii* (Theory of information). Moscow, Izd. inostrannoi literatury, 1957, 443 p.

Рецензенты:

Сергеев Б.С., д.т.н., профессор кафедры «Электрические машины», Уральский государственный университет путей сообщения, г. Екатеринбург;

Иванов В.Э., д.т.н., профессор Института радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург.

Работа поступила в редакцию 06.03.2015.