УДК 517.977.57

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЯДРА ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА, СЛАБО ИНВАРИАНТНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Ибрагимов У.М., Оразов И.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, e-mail: us-ibr@rambler.ru

Работа посвящена исследованию вопроса о существовании непустого ядра живучести выпуклого замкнутого множества, слабо инвариантного относительно системы со сосредоточенными параметрами. Рассматривается управляемая система, в правой части которой в аддитивной форме находится управление. Параметр управления принимает значения из непустого выпуклого компактного подмножества векторного пространства. При этом область управления является выпуклым компактным многогранником. Вводится понятие – «сильно и слабо инвариантные множества» относительно системы, физический смысл которых заключается в том, чтобы по возможности дольше «удержать» объект в желаемом состоянии с помощью управления им. При этом здесь удержание объекта понимается не в геометрическом смысле, а в смысле удержания усредненного значения относительно объема объекта. Получены необходимые и достаточные условия для существования ядра выпуклого множества области выживания относительно линейной управляемой системы. Приведенные условия отличаются от ранее полученных результатов.

Ключевые слова: оптимальное управление, инвариантные множества, ядро живучести

EXISTENCE OF THE KERNEL OF CONVEX, WEAKLY INVARIANT WITH RESPECT TO CONTROLLED SYSTEM SET

Ibragimov U.M., Orazov I.

M. Auezov named South-Kazakhstan State university, Shymkent, e-mail: us-ibr@rambler.ru

In this paper we consider the question of the existence of non-empty survivability kernel of closed convex set, which is weakly invariant with respect to system with lumped parameters. We consider controlled system in the right side of which there is the control in the additive form. Control parameter takes values from nonempty compact convex subset of vector space. In this case control region is convex compact polyhedron. We introduce the concept – «strongly and weakly invariant sets» relatively the system, the physical meaning of which is that as long as possible to «hold» the object in the desired state by management. In this case holding of the object is not understood in the geometric sense, but in terms of keeping the average value relatively the volume of the object. Were obtained necessary and sufficient conditions for existence of kernel of convex set of survivability region, relatively linear controlled system. The given conditions differ from before obtained results.

Keywords: optimal control, the invariant set, the kernel of survivability

Современные наукоемкие технические процессы невозможно реализовать без дополнения их современными достижениями теории управления. Как известно, во многих линейных управляемых системах, управляющие параметры могут находиться как в правой части уравнения, так и в граничных условиях. Кроме того, многие важные в теории управления множества обладают свойствами инвариантности. Также известны необходимые и достаточные условия слабой инвариантности области выживания при различных ограничениях на управления [1, 4, 6].

Известно, что задача приведения фазовой точки на целевое множество G с дальнейшим удержанием на нем эквивалентна задаче приведения фазовой точки на ядро живучести области выживания G. При этом возникает следующий вопрос качественного характера, который рассматривается в данной работе: существует ли непустое подмножество множества G, слабо инвариантное относительно рассматриваемой управляемой системы [2].

Постановка задачи. Пусть дана линейная управляемая система

$$\dot{x} = Ax - u, \qquad (1)$$

где $x \in R$ – фазовый вектор, A – $d \times d$ матрица, $u \in P$ – параметр управления, который принимает значения из непустого выпуклого компактного подмножества пространства R^d.

Определение 1. Множество $Y \subset R^d$ называется слабо инвариантным относительно системы (1), если для любой начальной точки $x_0 \in Y$ существует управление такое, что для всех $t \geq 0$.

Определение 2. Множество $Y \subset R^d$ называется сильно инвариантным относительно системы (1), если для любых $x_0 \in Y$ и $u(\cdot) \in U$, существует $x(t, x_0, u(\cdot)) \in Y$ при всех $t \geq 0$.

Определение 3. Максимальное подмножество $Y \subset R^d$, слабо инвариантное относительно системы (1), называется ядром живучести множества Y относительно системы (1) и обозначается через $core_{(1)}Y$.

Предположим, что G – непустое выпуклое замкнутое подмножество R^d. Ядро выпуклого множества G, которое обозначим через $core_{(1)}G$, является выпуклым замкнутым подмножеством G [3].

Вектор $a \in R^d$ называется асимптотическим направлением множества $Y \subset R^d$, если $Y + \lambda a \subset Y$ для всех $\lambda \geq 0$. Совокупность всех асимптотических направлений множества Y обозначим через $\vec{Y}$, т.е.

$$\vec{Y} = \{a \in R^d \mid Y + \lambda a \subset Y \text{ для всех } \lambda \geq 0\}.$$

Согласно определению ядро множества $Y \subset R^d$относительно однородной системы

$$\dot{x} = Ax \qquad (2)$$

определяется формулой

$$core_{(2)}Y = \{x \in Y \mid e^{tA}x \in Y \text{ для всех } t \geq 0\}.$$

Положим

$$\Lambda = A^{-1}P,\ \hat{\Lambda} = A^{-1}\left(core_{(2)}\vec{G} + P\right),$$

где $A^{-1}Z$ – прообраз множества Z при отображении A.

Результаты. *Лемма 1*. Справедливы включения

$$\Lambda \cap G \subset \hat{\Lambda} \cap G \subset core_{(1)}G.$$

Доказательство. Первое включение вытекает из определений множеств Λ, $\hat{\Lambda}$, так как $0 \in core_{(2)}\vec{G}$.

Пусть $x_0 \in \hat{\Lambda} \cap G$. По определению множества $\hat{\Lambda}$ найдется $u_0 \in P$ такое, что $Ax_0 - u_0 \in core_{(2)}\vec{G}$ и $x_0 \in G$. Положив $u(t) \equiv u_0$, рассмотрим соответствующую траекторию системы (1). Поскольку $core_{(2)}\vec{G}$ сильно инвариантно относительно системы (2), то

$$x\left(t, x_0, u(\cdot)\right) = e^{tA}x_0 - \int_0^t e^{(t-r)A}u_0 dr =$$

$$= x_0 + \int_0^t e^{rA}\left(Ax_0 - u_0\right)dr \in x_0 + core_{(2)}\vec{G} \cap G$$

при всех $t \geq 0$. Следовательно, $x_0 \in core_{(1)}G$. Лемма доказана.

Согласно лемме [8], если $core_{(1)}G \neq \emptyset$, то

$$\overline{core_{(1)}G} = core_{(2)}\vec{G}. \qquad (3)$$

Отсюда следует, $core_{(1)}G$ компактно, если $core_{(2)}\vec{G} = \{0\}$. Также из теоремы [7] получим $core_{(1)}G \neq \emptyset$, если $G \cap \Lambda \neq \emptyset$.

Лемма 2. Пусть $core_{(2)}\vec{G}$ не является линейным подпространством R^d. Тогда существует собственный вектор матрицы A, принадлежащий $core_{(2)}\vec{G}$.

Доказательство. На единичной сфере $S = \{x \in R^d \mid |x| = 1\}$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax - (x, Ax)x. \qquad (4)$$

Ясно, что если $core_{(2)}\vec{G}$ есть луч, то его направляющий вектор будет собственным для матрицы A. Далее, пусть $core_{(2)}\vec{G}$ отлично от луча. Положим $\Sigma = S \cap core_{(2)}\vec{G}$. Так как выпуклый конус $core_{(2)}\vec{G}$ не является линейным подпространством R^d, то найдется ненулевой вектор $m \in R^d$ такой, что $(m, y) \geq 0$ для всех $y \in \Sigma$. Отсюда следует, что оператор ортогонального проектирования Π из R^d на $\{x \in R^d \mid (x, m) = 0\}$ является гомеоморфизмом Σ на $\Pi\Sigma$. Ясно, что $\Pi\Sigma$ есть выпуклый компакт. Поэтому Σ обладает свойством неподвижной точки [5]. Пусть x_tодна из неподвижных точек. В силу компактности Σ существует последовательность $\{t_n\}$ такая, что $t_n \downarrow 0$ и $x_{t_n} \to x_*$, $x_* \in \Sigma$ при $n \to +\infty$ Далее, аналогично теореме [7] доказывается, что x_* – точка покоя системы (4), т.е. $Ax_* - (x_*, Ax_*)x_* = 0$. Таким образом, единичный вектор $x_* \in core_{(2)}\vec{G}$ является собственным для матрицы A. Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, если матрица A не имеет действительных собственных чисел, то $core_{(2)}\vec{G}$ является линейным подпространством R^d.

Легко убедиться, что если $G = G_0 + G_1$ где G_0 –линейное подпространство R^d и G_1выпуклый компакт, то $core_{(2)}\vec{G}$ является максимальным подпространством G_0, инвариантным относительно A и $\vec{G} = G_0$.

Теорема 1. Пусть $core_{(2)}\vec{G}$ есть линейное подпространство R^d. Тогда для того, чтобы $core_{(1)}G \neq \emptyset$ необходимо и достаточно, чтобы $G \cap \hat{\Lambda} \neq \emptyset$.

Доказательство теоремы. Достаточность. Доказательство достаточности теоремы вытекает из леммы 1.

Необходимость. Предположим, что $core_{(1)}G \neq \emptyset$. Введем обозначения: J – ортогональное дополнение к $core_{(2)}\vec{G}$ в R^d; Π – оператор ортогонального проектирования из R^d на J; $\Omega = \Pi\left(core_{(1)}G\right)$.

Из (3) следует, что Ω есть выпуклое компактное подмножество J и $core_{(1)}G = core_{(2)}\vec{G} + \Omega$.

Далее, рассмотрим управляемую систему

$$\dot{y} = \Pi A y - \Pi u, \qquad (5)$$

где $y \in R^d$ – фазовый вектор, $u \in P$ – параметр управления.

Множество Ω является слабо инвариантным относительно системы (5). Действительно, пусть $y_0 \in \Omega$ т.е. $y_0 = \Pi x_0$ для некоторого $x_0 \in core_{(1)}G$. Согласно определению 3 найдется $u(\cdot) \in U$ такое, что

$$x(t) \in core_{(1)}G, \qquad (6)$$

для всех $t \geq 0$ где $x(\cdot) = x(\cdot, x_0, u(\cdot))$. Так как $core_{(2)}\vec{G}$ инвариантно относительно A, то

$$\Pi A x(t) = \Pi A(x(t) - \Pi x(t)) + \Pi A \Pi x(t) = \Pi A \Pi x(t). \qquad (7)$$

Следовательно, функция $y(\cdot) = \Pi x(\cdot)$ является решением задачи Коши $\dot{y} = Ay - \Pi u(t)$, $y(0) = y_0$. Из (6) следует, что $y(t) \in \Omega$ для всех $t \geq 0$. Таким образом, Ω – слабо инвариантно относительно системы (5).

Далее, по теореме [7] существует точка покоя y_* системы (5), принадлежащая Ω. По определению точки покоя найдется $u_* \in P$ такое, что $\Pi(Ay_* - u_*) = 0$.

Следовательно, $y_* \in A^{-1}\left(core_{(2)}\vec{G} + P\right)$ и включение $y_* \in G$ очевидно. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $core_{(2)}\vec{G}$ есть линейное подпространство R^d и $\det A \neq 0$. Тогда $core_{(1)}G \neq \emptyset$ в том случае, если $G \bigcap \Lambda \neq \emptyset$.

Доказательство. В соответствии с леммой 1 и теоремой 1 достаточно показать, что если $G \bigcap \hat{\Lambda} \neq \emptyset$, то $G \bigcap \Lambda \neq \emptyset$.

Предположим, что $G \bigcap \Lambda \neq \emptyset$. Поскольку $\det A \neq 0$ и подпространство $core_{(2)}\vec{G}$ инвариантно относительно A, то

$$A^{-1} core_{(2)}\vec{G} = core_{(2)}\vec{G}.$$

Значит,

$$\left(core_{(2)}\vec{G} + \Lambda\right) \bigcap G \neq \emptyset. \qquad (8)$$

Так как $core_{(2)}\vec{G}$ – линейное подпространство R^d, содержащееся в $\vec{G}$, то из (8) вытекает, что $G \bigcap \Lambda \neq \emptyset$. Теорема доказана.

Заключение

В статье приведены условия для существования ядра выпуклого множества G, слабо инвариантного относительно линейной управляемой системы. Основными результатами статьи являются:

• Теорема 1. Пусть $core_{(2)}\vec{G}$ есть линейное подпространство R^d. Тогда для того, чтобы $core_{(1)}G \neq /0$, необходимо и достаточно, чтобы $G \bigcap \hat{\Lambda} \neq \emptyset$.

• Теорема 2. Пусть $core_{(2)}\vec{G}$ есть линейное подпространство R^d и $\det A \neq 0$. Тогда $core_{(1)}G \neq /0$ в том случае, если $G \bigcap \Lambda \neq \emptyset$.

Список литературы

1. Ибрагимов У.М. Выяснение слабой инвариантности области выживания управляемой системы // Математическое моделирование и краевые задачи: труды VII Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.2. – Самара, СГТУ, 2010. – С. 105–109.
2. Ибрагимов У.М. К теории задачи живучести // Материалы XVI межд. конф. по вычисл. механике и совр. прикл. прог. системам (ВМСППС'2009). – Алушта, 2009. – С. 332–334.
3. Ли Э.В., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 574 с.
4. Тухтасинов М., Ибрагимов У.М. Об инвариантных множествах при интегральном ограничении на управления // Изв. вузов. Матем. – 2011. –№ 8. – С. 69–76.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1072 с.
6. Aubin, J.-P. Viability Theory // J.-P.Aubin. – 2nd edition. – Birkhauzer, – Boston, 2009. – 572 p.
7. Feuer A., Heymann J. Omega-invariance in control systems with bounded controls // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1976. – № 53. – P. 266–276.
8. Hajek O. Cores of targets in linear control systems // Math Systems Theory. – 1974. – № 8. – P. 203–206.

References

1. Ibragimov U.M. Elucidation of the weak invariance of the survival region of the controlled system// Math. modeling and boundary value problems: proceedings of the VII All-Russian scient. conf. with intern. partic. Part 2. Samara, SSTU, 2010. pp. 105–109.
2. Ibragimov U.M. K To the theory of survivability // Materials of XVI Int. Conf. on comput. mechanics and modern. appl. prog. systems (VMSPPS'2009). Alushta, 2009. pp. 332–334.
3. Lee E.V, Marcus L. Foundations of optimal control theory. M.: Nauka, 1972. 574 p.
4. Tukhtasinov M., Ibragimov U.M. Sets Invariant under an Integral Constraint on Controls // Russian Mathematics (Iz. Vuz). 2011, Vol. 55, no 8, pp. 59–65.
5. Edwards R. Functional analysis. Theory and Applications. M.: Mir, 1969. 1072 p.
6. Aubin, J.-P. Viability Theory / J.-P.Aubin. 2nd edition. Birkhauzer, Boston, 2009. 572 p.
7. Feuer A., Heymann J. Omega-invariance in control systems with bounded controls. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1976, no. 53, pp. 266–276.
8. Hajek O. Cores of targets in linear control systems. Math Systems Theory. 1974, no. 8, pp. 203–206.

Рецензенты:

Нысанов Е.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры «Теория и методика преподавания информатики» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауэзова, г. Шымкент;

Шалданбаев А.Ш., д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауэзова, г. Шымкент.

Работа поступила в редакцию 04.04.2012